zawsze tak dobrać prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki, iż otrzymamy serie równie prawdopodobne. Rozpatrzmy na przykład grę ROO przeciw RRR. Możemy po krótkich rachunkach obliczyć, że prawdopodobieństwo p_s zwycięstwa gracza obstawiającego serię ROO wynosi

$$\frac{q^2(1+p)}{1-pq-p^2q}.$$

Podstawiając $q = 1 - p$ w równaniu

$$\frac{q^2(1+p)}{1-pq-p^2q} = \frac{1}{2},$$

uzyskamy równanie $p^3 - 2p^2 - p + 1 = 0$. Używając metod numerycznych, możemy znaleźć pierwiastek tego równania należący do przedziału $(0,1)$: $p = 0{,}554958132\ldots$

Istnieją jednak gry, w których nigdy nie będzie sprawiedliwości. Na przykład w rozważanej wcześniej grze OOR przeciw ORO seria OOR zawsze będzie bardziej prawdopodobna niż seria ORO, niezależnie od tego, jakie dobierzemy prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki p. Jeśli bowiem zachodzi równość

$$p_s = \frac{q^2}{1-p-p^2q} = \frac{1}{2},$$

to, po podstawieniu $q = 1 - p$, mamy

$$2(1-2p+p^2) = 1 - p - p^2(1-p).$$

Zatem

$$p^3 - 3p^2 + 3p - 1 = 0$$

i ostatecznie $(p-1)^3 = 0$, co nie może zachodzić dla $p \in (0,1)$.

Poniższa tabela przedstawia prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki, dla którego odpowiednia gra jest sprawiedliwa.

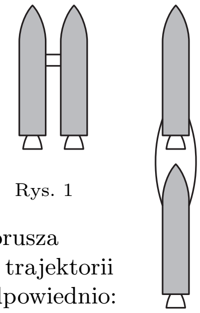
	OOO	OOR	ORO	ROO	RRO	ROR	ORR	RRR
OOO	X	0,5	0,276	0,206	0,396	0,394	0,445	0,5
OOR	0,5	X	BRAK	0,293	0,5	0,597	0,618	0,604
ORO	0,276	BRAK	X	0,5	0,403	0,5	0,5	0,606
ROO	0,206	0,293	0,5	X	0,382	0,5	0,5	0,555
RRO	0,396	0,5	0,403	0,382	X	BRAK	0,707	0,5
ROR	0,394	0,597	0,5	0,5	BRAK	X	0,5	0,724
ORR	0,445	0,618	0,5	0,5	0,707	0,5	X	0,794
RRR	0,5	0,604	0,606	0,555	0,5	0,724	0,794	X

Spoglądając na tabelę, widzimy, że gry Penneya choć wydają się oferować obu graczom równe szanse, w istocie często są tak niesprawiedliwe, że sprawiedliwości nie może przywrócić nawet najbardziej niesymetryczna moneta.

Zadania

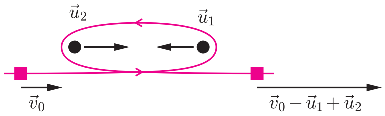
Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 623. W przestrzeni kosmicznej odpalamy dwie rakiety: jedną złożoną z 2 identycznych silników rakietowych odpalanych jednocześnie w chwili startu, drugą złożoną z takich samych silników odpalanych kolejno, drugi po odczepieniu wypalonego pierwszego (rys. 1). Porównać prędkości końcowe obu rakiet.
Rozwiązanie na str. 7

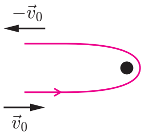


Rys. 1

F 624. Nadlatujący z prędkością $\vec{v}_0$ z daleka pojazd kosmiczny porusza w polu grawitacyjnym 2 zbliżających się do siebie ciężkich ciał po trajektorii zadanej rysunkiem 2. W momencie mijania mają one prędkości odpowiednio: $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$. Ponieważ oba ciała są dużo cięższe od pojazdu, w układzie związanym z ciałami efektem mijania się ciał jest tylko zmiana kierunku wektora prędkości pojazdu (rys. 3), a w innym układzie $\vec{v}_0 \to -\vec{v}_0 + \vec{u}$ ($\vec{u}$ bez zmian). Oznacza to, że prędkość pojazdu daleko od obu ciał wyniesie $\vec{v}_k = \vec{v}_0 - \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, a jego energia kinetyczna wzrośnie. Łamie to jednak zasadę zachowania energii. Gdzie jest luka w rozumowaniu?
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 2

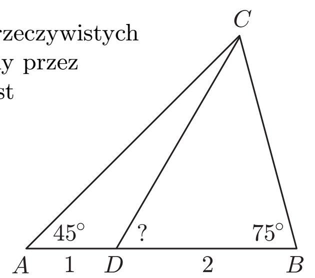


Rys. 3

Redaguje Waldemar POMPE

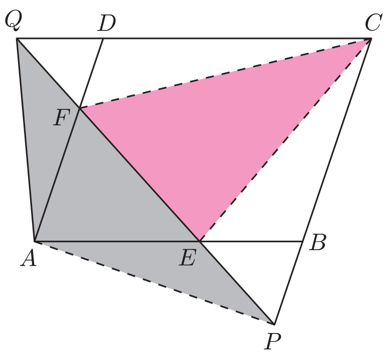
M 1066. Niezerowy wielomian $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych ma tę własność, że wielomian $f(x^2+x+1)$ jest podzielny przez wielomian $f(x)$. Wykazać, że stopień wielomianu $f(x)$ jest liczbą parzystą.
Rozwiązanie na str. 10

M 1067. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A = 45^\circ$ oraz $\sphericalangle B = 75^\circ$ (rys. 4). Punkt D leży na odcinku AB i spełnia warunek $AD : DB = 1 : 2$. Wyznaczyć miarę kąta BDC.
Rozwiązanie na str. 13



Rys. 4

M 1068. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD równoległoboku $ABCD$ (rys. 5). Prosta EF przecina proste BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że pola trójkątów APQ i CEF są równe.
Rozwiązanie na str. 12



Rys. 5