Ukryta niesprawiedliwość w grach Penneya

Wojciech KRZEMIŃSKI

Gra Penneya polega na rzucaniu monetą, aż do uzyskania określonej serii orłów i reszek. Na początku gracze wybierają serie długości n. Na przykład trzech graczy może wybrać serie: ORORR (gracz A), RRORR (gracz B) oraz ROORO (gracz C). Jeśli potem uzyskane zostaną następujące wyniki: OORRORORORORR, to gra kończy się zwycięstwem zawodnika A, gdyż w ostatnich pięciu rzutach otrzymano serię ORORR. Ogólnie rzecz biorąc, gdy w grze Penneya bierze udział n graczy, to każdy z nich wybiera „swoją”serię i gra toczy się do chwili uzyskania jednej z wybranych serii. W klasycznej wersji gry seria jest trzyelementowa, a graczy dwóch.

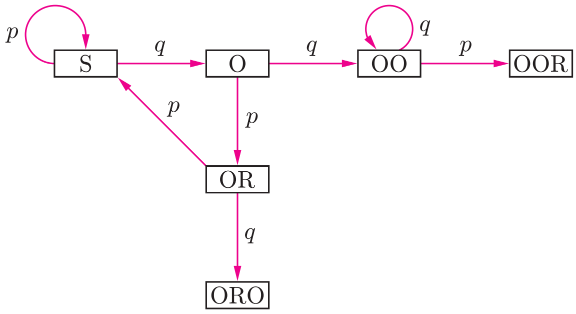
Z istoty gry wynika, że liczba graczy może być zmienna od jednego do 2^n dla serii n-elementowych.

Zauważmy, że gdyby w grę Penneya o długości serii 3 grało 2^3 graczy, to wybrana zostałaby każda z ośmiu możliwych serii: ORR, ROO, OOR, RRR, ROR, RRO, ORO, OOO i gra kończyłaby się zawsze po trzech rzutach, przy czym każdy z graczy miałby równe szanse wygranej ($p = \frac{1}{2^3}$). Gra byłaby więc sprawiedliwa. Uogólniając, możemy stwierdzić, że w przypadku monety symetrycznej, gdy weźmiemy 2^n graczy i serie długości n, to prawdopodobieństwo zwycięstwa dowolnego z graczy jest równe $\frac{1}{2^n}$.

A co jest ze sprawiedliwością gry Penneya o seriach n-elementowych, gdy graczy będzie mniej niż 2^n? Rozpatrzmy przypadek, gdy graczy będzie dwóch, a seria trzyelementowa. Zauważmy, że dla gry RRR przeciw ORR, prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza obstawiającego serię ORR wynosi $P(\mathrm{ORR}) = \frac{7}{8}$, gdyż uzyskanie w pierwszych trzech rzutach innej serii niż RRR powoduje wygraną serii ORR.

Z kolei w grze RRO przeciw ORR mamy $P(\mathrm{RRO}) = \frac{1}{4}$, gdyż uzyskanie w pierwszych dwóch rzutach serii innej niż RR powoduje wygraną serii ORR.

Nie zawsze jednak szanse zwycięstwa danego gracza obliczamy tak szybko. Czasami trzeba się bardziej natrudzić. Dla przykładu obliczymy prawdopodobieństwo uzyskania serii OOR przed serią ORO. Ponieważ później będziemy rozpatrywać przypadek monety niesymetrycznej, poniższe obliczenia przeprowadzimy w dość ogólnej postaci, przyjmując prawdopodobieństwo wyrzucenia orła równe q, a prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki równe p. Spójrzmy na poniższy schemat.



Stan wyjściowy oznaczony został tu przez s. Wyrzucenie reszki powoduje powrót do stanu wyjściowego, bo nie faworyzuje żadnej z opcji OOR i ORO. Ze stanu s z prawdopodobieństwem q dochodzimy do stanu O, w którym w ostatnim rzucie wypadł orzeł. Ze stanu O z prawdopodobieństwem p przechodzimy do stanu OR i z prawdopodobieństwem q do stanu OO. Ze stanu OR dochodzimy z prawdopodobieństwem q do zwycięstwa gracza obstawiającego serię ORO lub z prawdopodobieństwem p wracamy do stanu wyjściowego, w którym żadna z wybranych serii nie uzyskała nowych szans w trakcie dotychczasowego rzucania monetą. Z kolei ze stanu OO droga prowadzi albo do uzyskania serii OOR, albo do wyrzucania orła w nieskończoność. Czytelnik zechce zauważyć, że rozważania te dadzą się streścić w poniższym układzie równań, gdzie przez p_X oznaczono prawdopodobieństwo zwycięstwa gracza obstawiającego serię OOR, pod warunkiem, że znajdujemy się w stanie X:

$$\begin{cases} p_s = pp_s + qp_{\mathrm{O}} \\ p_{\mathrm{O}} = pp_{\mathrm{OR}} + qp_{\mathrm{OO}} \\ p_{\mathrm{OR}} = pp_s + q \cdot 0 \\ p_{\mathrm{OO}} = qp_{\mathrm{O}} + p \cdot 1 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{cases} p_s = pp_s + qp_{\mathrm{O}} \\ p_{\mathrm{O}} = p^2 p_s + q \\ p_{\mathrm{OO}} = qp_{\mathrm{OO}} + p = 1 \\ p_{\mathrm{OR}} = pp_s, \end{cases}$$

czyli

$$p_s = pp_s + q(p^2 p_s + q)$$

i ostatecznie widzimy, że prawdopodobieństwo uzyskania serii OOR przed serią ORO wynosi

$$p_s = \frac{q^2}{1 - p - p^2 q},$$

co dla $p = q = \frac{1}{2}$ daje $p_s = \frac{2}{3}$.

Podobnie możemy obliczać, oczywiście, prawdopodobieństwa dla innych konkurujących ze sobą serii. W tabeli poniżej przedstawione są prawdopodobieństwa wygranej w poszczególnych klasycznych grach Penneya z prawdopodobieństwem $p = q = \frac{1}{2}$. Liczba w kratce oznacza prawdopodobieństwo wygranej gracza a przed graczem b.

a/b	OOO	OOR	ORO	ROO	RRO	ROR	ORR	RRR
OOO	X	1/2	2/5	1/8	1/4	5/12	2/5	1/2
OOR	1/2	X	2/3	1/4	1/2	5/8	2/3	3/4
ORO	3/5	1/3	X	1/2	3/8	1/2	1/2	7/12
ROO	7/8	3/4	1/2	X	1/3	1/2	1/2	3/5
RRO	3/4	1/2	5/8	2/3	X	2/3	1/4	1/2
ROR	7/12	3/8	1/2	1/2	1/3	X	1/2	3/5
ORR	3/5	1/3	1/2	1/2	3/4	1/2	X	7/8
RRR	1/2	1/4	5/12	2/5	1/2	2/5	1/8	X

Jak widzimy, aż dwadzieścia z dwudziestu ośmiu gier jest niesprawiedliwych. Jeśli jednak mamy do czynienia jedynie z dwoma graczami, to wydaje się, że możemy zawsze tak dobrać prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki, iż otrzymamy serie równie prawdopodobne. Rozpatrzmy na przykład grę ROO przeciw RRR. Możemy po krótkich rachunkach obliczyć, że prawdopodobieństwo p_s zwycięstwa gracza obstawiającego serię ROO wynosi

$$\frac{q^2(1+p)}{1-pq-p^2q}.$$

Podstawiając $q=1-p$ w równaniu

$$\frac{q^2(1+p)}{1-pq-p^2q}=\frac{1}{2},$$

uzyskamy równanie $p^3-2p^2-p+1=0$. Używając metod numerycznych, możemy znaleźć pierwiastek tego równania należący do przedziału $(0,1)$: $p=0{,}554958132\ldots$

Istnieją jednak gry, w których nigdy nie będzie sprawiedliwości. Na przykład w rozważanej wcześniej grze OOR przeciw ORO seria OOR zawsze będzie bardziej prawdopodobna niż seria ORO, niezależnie od tego, jakie dobierzemy prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki p. Jeśli bowiem zachodzi równość

$$p_s=\frac{q^2}{1-p-p^2q}=\frac{1}{2},$$

to, po podstawieniu $q=1-p$, mamy

$$2(1-2p+p^2)=1-p-p^2(1-p).$$

Zatem

$$p^3-3p^2+3p-1=0$$

i ostatecznie $(p-1)^3=0$, co nie może zachodzić dla $p\in(0,1)$.

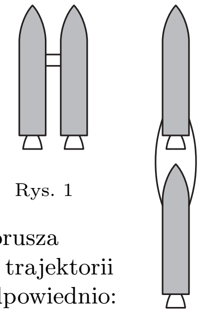
Poniższa tabela przedstawia prawdopodobieństwo wyrzucenia reszki, dla którego odpowiednia gra jest sprawiedliwa.

	OOO	OOR	ORO	ROO	RRO	ROR	ORR	RRR
OOO	X	0,5	0,276	0,206	0,396	0,394	0,445	0,5
OOR	0,5	X	BRAK	0,293	0,5	0,597	0,618	0,604
ORO	0,276	BRAK	X	0,5	0,403	0,5	0,5	0,606
ROO	0,206	0,293	0,5	X	0,382	0,5	0,5	0,555
RRO	0,396	0,5	0,403	0,382	X	BRAK	0,707	0,5
ROR	0,394	0,597	0,5	0,5	BRAK	X	0,5	0,724
ORR	0,445	0,618	0,5	0,5	0,707	0,5	X	0,794
RRR	0,5	0,604	0,606	0,555	0,5	0,724	0,794	X

Spoglądając na tabelę, widzimy, że gry Penneya choć wydają się oferować obu graczom równe szanse, w istocie często są tak niesprawiedliwe, że sprawiedliwości nie może przywrócić nawet najbardziej niesymetryczna moneta.

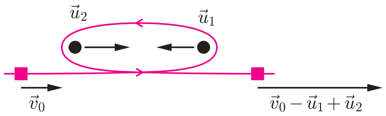
Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

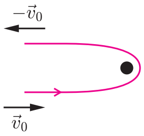


Rys. 1

F 623. W przestrzeni kosmicznej odpalamy dwie rakiety: jedną złożoną z 2 identycznych silników rakietowych odpalanych jednocześnie w chwili startu, drugą złożoną z takich samych silników odpalanych kolejno, drugi po odczepieniu wypalonego pierwszego (rys. 1). Porównać prędkości końcowe obu rakiet.
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 2

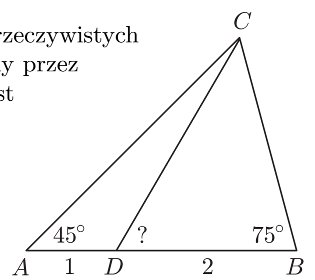


Rys. 3

F 624. Nadlatujący z prędkością $\vec{v}_0$ z daleka pojazd kosmiczny porusza w polu grawitacyjnym 2 zbliżających się do siebie ciężkich ciał po trajektorii zadanej rysunkiem 2. W momencie mijania mają one prędkości odpowiednio: $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$. Ponieważ oba ciała są dużo cięższe od pojazdu, w układzie związanym z ciałami efektem mijania się ciał jest tylko zmiana kierunku wektora prędkości pojazdu (rys. 3), a w innym układzie $\vec{v}_0\to-\vec{v}_0+\vec{u}$ ($\vec{u}$ bez zmian). Oznacza to, że prędkość pojazdu daleko od obu ciał wyniesie $\vec{v}_k=\vec{v}_0-\vec{u}_1+\vec{u}_2$, a jego energia kinetyczna wzrośnie. Łamie to jednak zasadę zachowania energii. Gdzie jest luka w rozumowaniu?
Rozwiązanie na str. 7

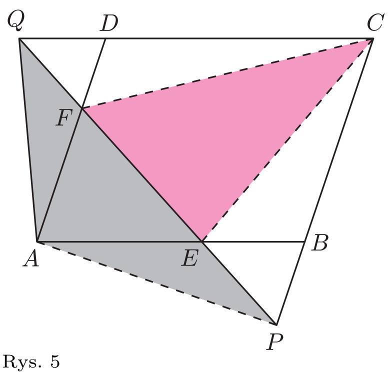
Redaguje Waldemar POMPE

M 1066. Niezerowy wielomian $f(x)$ o współczynnikach rzeczywistych ma tę własność, że wielomian $f(x^2+x+1)$ jest podzielny przez wielomian $f(x)$. Wykazać, że stopień wielomianu $f(x)$ jest liczbą parzystą.
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 4

M 1067. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A=45^\circ$ oraz $\sphericalangle B=75^\circ$ (rys. 4). Punkt D leży na odcinku AB i spełnia warunek $AD:DB=1:2$. Wyznaczyć miarę kąta BDC.
Rozwiązanie na str. 13



Rys. 5

M 1068. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AB i AD równoległoboku $ABCD$ (rys. 5). Prosta EF przecina proste BC i CD odpowiednio w punktach P i Q. Wykazać, że pola trójkątów APQ i CEF są równe.
Rozwiązanie na str. 12