Klub 44

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

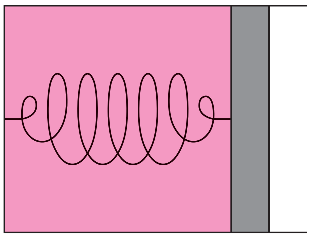
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2004

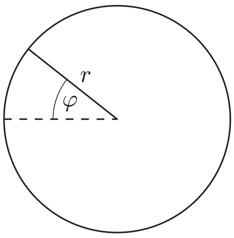
Przypominamy treść zadań:

374. Koła roweru jadącego z prędkością 5 m/s mają średnicę 1 m. Na jaką maksymalną wysokość (nad ziemią) może się wznieść grudka błota oderwana od opony tego roweru?

375. Gaz doskonały jest zamknięty w cylindrze (rys. 1) tłokiem połączonym z dnem cylindra sprężyną o stałej sprężystości k i zerowej długości swobodnej (tzn. siła wywierana przez sprężynę jest równa zeru, gdy tłok styka się z dnem cylindra). Na zewnątrz cylindra jest próżnia. Ile ciepła trzeba dostarczyć, aby ograć 1 mol tego gazu o 1 stopień, jeśli dla przemiany w stałej objętości analogiczne ciepło jest równe C_V?



Rys. 1



Rys. 2

374. Jeśli grudka oderwie się od opony w chwili, gdy jej „kąt położenia" (zob. rys. 2) jest równy φ, to wysokość w tej chwili wyniesie $r + r\sin\varphi$, a pionowa składowa prędkości – $v\cos\varphi$. Maksymalna wysokość wzniesienia będzie więc równa

$$h = r + r\sin\varphi + \frac{v^2}{2\mathrm{g}}\cos^2\varphi.$$

Po podstawieniu $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$ otrzymujemy wyrażenie kwadratowe w zmiennej $\sin\varphi$. Maksymalną wartością h jest

$$h = r + \frac{v^2}{2\mathrm{g}} + \frac{\mathrm{g}r^2}{2v^2} = 1{,}82 \text{ m}.$$

375. Długość słupa gazu w cylindrze jest równa $x = V/S$, gdzie S – pole powierzchni tłoka. Po pomnożeniu x przez k otrzymujemy siłę sprężystości (równą sile parcia gazu na tłok), a po podzieleniu siły przez S – ciśnienie gazu:

$$p = \frac{kV}{S^2}.$$

Podstawiając to wyrażenie do równania Clapeyrona, otrzymujemy

$$\frac{k}{S^2}V^2 = nRT.$$

Małe przyrosty V i T są więc powiązane zależnością

$$2p\Delta V = nR\Delta T.$$

Z drugiej strony, I zasada termodynamiki pozwala znaleźć dostarczone ciepło ze wzoru

$$Q = \Delta U + p\Delta V.$$

Ponieważ energia wewnętrzna gazu doskonałego zależy tylko od jego temperatury, więc jej zmiana jest równa analogicznej zmianie w przemianie izochorycznej (kiedy praca W jest równa zeru). Stąd

$$Q = nC_V\Delta T + p\Delta V.$$

Aby wyznaczyć ciepło właściwe C rozważanego gazu, wystarczy teraz podstawić wcześniej znalezione wyrażenie na $p\Delta V$. Ostatecznie

$$C = \frac{Q}{n\Delta T} = C_V + \frac{1}{2}R.$$

Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\int\!\!\sum\!\!\int !} = 44$$

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
467 ($WT = 2{,}24$) i **468** ($WT = 1{,}55$)
z numeru 10/2003

Paweł Najman	– Jaworzno	45,54
Paweł Kubit	– Kraków	42,51
Piotr Kumor	– Olsztyn	42,01
Andrzej Jóźwik	– Kielce	40,64
Janusz Olszewski	– Suwałki	34,19
Witold Bednarek	– Łódź	34,03

Paweł Najman – nowa twarz w **Klubie 44M** – pierwsza od półtora roku. Witamy!

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2004

Przypominamy treść zadań:

477. Udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1 + x_1^2 + \ldots + x_k^2} < \sqrt{n}.$$

478. W trójkącie ABC wysokość CD dzieli kąt przy wierzchołku C tak, że $|\sphericalangle BCD| = 2 \cdot |\sphericalangle ACD|$. Odcinek CE jest dwusieczną kąta BCD; punkty D, E leżą na odcinku AB. Wykazać, że $|AD| \cdot |BC| = |CD| \cdot |BE|$.

477. Można zakładać, że liczby x_i są nieujemne. Oznaczmy wyrażenie po lewej stronie nierówności przez $F_n(x_1, \ldots, x_n)$. Dowodzimy przez indukcję, że funkcja F_n przyjmuje wartości mniejsze niż $\sqrt{n}$. Dla $n = 1$ mamy

$$F_1(x) = \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

Zakładamy słuszność tezy dla n, bierzemy dowolne $n+1$ liczb nieujemnych $x_1, \ldots, x_{n+1}$ i badamy wartość funkcji F_{n+1}, wprowadzając oznaczenie $p = \sqrt{1 + x_1^2}$:

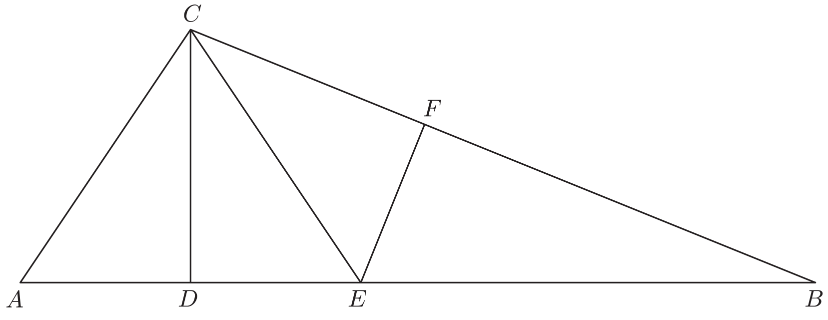
$$\begin{aligned} F_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{p^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2} = \\ &= \frac{x_1}{p^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{j+1}}{p^2 + x_2^2 + \ldots + x_{j+1}^2} = \\ &= \frac{\sqrt{p^2-1}}{p^2} + \frac{1}{p} F_n\Big(\frac{x_2}{p} + \ldots + \frac{x_{n+1}}{p}\Big) < \\ &< \frac{\sqrt{p^2-1}}{p^2} + \frac{\sqrt{n}}{p}; \end{aligned}$$

skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego. Zatem

$$\begin{aligned} \Big(F_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})\Big)^2 &< \frac{p^2-1}{p^4} + \frac{2\sqrt{p^2-1} \cdot \sqrt{n}}{p^3} + \frac{n}{p^2} = \\ &= n + \frac{1}{p^2} - \bigg(\frac{1}{p^2} - \frac{\sqrt{p^2-1} \cdot \sqrt{n}}{p}\bigg)^2 \leqslant \\ &\leqslant n + \frac{1}{p^2} \leqslant \\ &\leqslant n + 1 \end{aligned}$$

(bo $p \geqslant 1$) i mamy tezę indukcyjną $F_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) < \sqrt{n+1}$. To kończy dowód.

478. Niech F będzie rzutem prostokątnym punktu E na bok BC.



Półproste CD i CE dzielą kąt ACB na trzy równe kąty, wobec czego trójkąty ADC, EDC, EFC są przystające; tak więc $|AD| = |EF|$. Wystarczy teraz zauważyć, że każdy z iloczynów $|EF| \cdot |BC|$ oraz $|CD| \cdot |BE|$ wyraża podwojone pole trójkąta BCE.