Analiza niestandardowa

Leif ARKERYD, Szwecja

W matematyce, z jaką spotykamy się w szkole i na uniwersytecie, linię prostą identyfikuje się ze zbiorem punktów, w którym współrzędnymi są liczby rzeczywiste. Istnieje jednakże argument przeciw takiemu konkretnemu utożsamieniu, który opiera się na tym, iż nieskończenie wiele własności linii prostej nie może być ani dowiedzionych, ani obalonych za pomocą aksjomatów używanych w matematyce (tzw. aksjomatów Zermelo-Fraenkla).

Inny sposób spojrzenia na prostą reprezentował Gottfried Leibniz (1646–1716), który traktował ją jako nośnik różnych zbiorów punktów, nie tylko zbioru samych liczb rzeczywistych, ale i bardziej gęstych zbiorów zawierających idealne elementy nieskończenie małe, które miały być większe od zera, ale mniejsze od jakiejkolwiek liczby rzeczywistej. Ponadto tzw. zasada Leibniza zezwalała na to, by z elementami nieskończenie małymi robić wszystko to, co można robić ze zwykłymi liczbami rzeczywistymi. A zatem pomnożenie przez -1 daje elementy ujemne, dodawanie liczb rzeczywistych i nieskończenie małych sprawia, że nowe liczby zagęszczają „przestrzeń” pomiędzy liczbami rzeczywistymi. Wreszcie dzielenie liczby 1 przez dodatnie elementy nieskończenie małe daje coś większego od jakiejkolwiek liczby rzeczywistej – liczby nieskończone.

Leibniz jest także autorem oznaczenia $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ dla pochodnej oraz oznaczenia całki $\int f(x)dx$ (wykorzystującego znak $\int$: rozciągnięte S), co miało zresztą reprezentować, że pochodna i całka różnią się od ilorazu różnicowego, czy też od odpowiedniej sumy, jedynie o wartość nieskończenie małą.

Podejście Leibniza przyczyniło się w dużej mierze do rozkwitu analizy w wieku XVIII i znalazło swe odbicie w pracach najwybitniejszego reprezentanta ówczesnej matematyki Leonarda Eulera (1707–1783). Jednakże, jak zauważy każdy współczesny czytelnik dzieł Eulera, zasada Leibniza nie zawsze może być używana. W istocie wszelkie niekonsekwencje i sprzeczności w niej ukryte krytykowane były od początku, z największym może rozgłosem przez biskupa George'a Berkeleya (1685–1753), który wyśmiewał nieskończenie małe jako „duchy wielkości, które odeszły”.

W wieku XIX metoda nieskończenie małych była stopniowo zastępowana – odtąd dominującą – metodą „epsilona i delty”. Do końca wieku XIX aksjomatyczna teoria mnogości została silnie rozwinięta i – nieco paradoksalnie – wzmocniła opór przeciw używaniu nieskończenie małych u wielu generacji matematyków wierzących w stwierdzenie Georga Cantora (1845–1918), że jest możliwe dowiedzenie nieistnienia nieskończenie małych w ramach teorii mnogości. Dopiero od Skolema (1887–1963) i jego (niearchimedesowego) modelu arytmetyki z nieskończonymi liczbami (1927) rozpoczyna się powolny renesans nieskończenie małych.

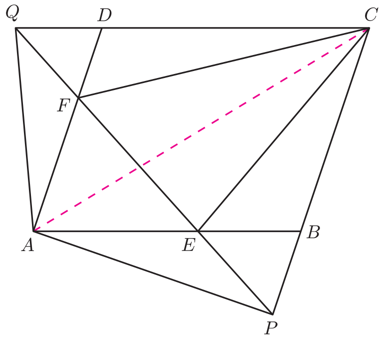
Model archimedesowy arytmetyki to taki, w którym dla każdej liczby N i każdej dodatniej liczby ε istnieje taka skończona liczba n, że zachodzi nierówność

$$\underbrace{\varepsilon+\varepsilon+\ldots+\varepsilon}_{\text{n razy}}>N.$$

Mówiąc obrazowo: w modelu archimedesowym dojdziemy do każdej liczby, idąc choćby najdrobniejszymi kroczkami.

Polski matematyk Jerzy Łoś (1920–1998) zrobił w tym kierunku ważny krok w 1955 r. W jego konstrukcji liczby hiperrzeczywiste są domkniętym rozszerzeniem (zawierającym nieskończenie małe) uporządkowanego ciała liczb rzeczywistych. Łoś podaje też nowoczesną i ścisłą wersję zasady Leibniza zwaną zasadą przejścia, która stwierdza dokładnie, które stwierdzenia przenoszą się z liczb rzeczywistych na elementy nieskończenie małe. Ostateczny krok należy do analizy niestandardowej i jej twórcy Abrahama Robinsona (1918–1974), który wykazał, że nowa wersja zasady Leibniza umożliwia rozwinięcie całej analizy opartej na liczbach hiperrzeczywistych.

Rozwiązanie zadania M 1068. Oznaczmy przez $[\mathcal{F}]$ pole figury $\mathcal{F}$. Niech K będzie punktem przecięcia prostych AC i PQ (rys.).



Wówczas dowodzona równość $[APQ]=[CEF]$ jest równoważna równości $[ACEP]=[CEF]$. Z kolei równość ta, po odjęciu od obu stron pola trójkąta KEC, przybiera postać $[AKP]=[FKC]$. Wreszcie dodając do obu stron ostatniej równości pole trójkąta AKF, przepisujemy dowodzoną zależność w postaci $[AFP]=[AFC]$, co jest prawdą.

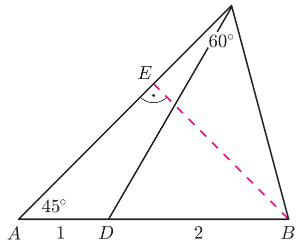
Użyteczność analizy niestandardowej oparta jest na dwóch własnościach: wspomnianej już zasadzie przejścia oraz własności zwanej nasyceniem, która wyraża fakt, że system liczb hiperrzeczywistych jest bardzo bogaty. Pierwszym zastosowaniem analizy niestandardowej było wypełnienie luk w rozumowaniu, jakie zawierał XVIII-wieczny rachunek nieskończenie małych. Ponadto dostarczyła ona nowego modelu systemu liczbowego z liczbami rzeczywistymi jako częścią liczb hiperrzeczywistych. W istocie, analiza niestandardowa idzie znacznie dalej, dostarczając modeli dla matematyki klasycznej powstałej na gruncie liczb rzeczywistych (odpowiednio hiperrzeczywistych) z możliwością przeprowadzania wszystkich klasycznych rozumowań w każdej ze struktur. Ponadto, obiekty struktury rzeczywistej mogą być interpretowane w ramach struktury hiperrzeczywistej w nowy i owocny sposób. Zasada przejścia daje tutaj ostre kryterium wyróżniające zbiory, do których odnosi się zasada Leibniza. Na przykład zbiór liczb naturalnych mniejszych od danej liczby całkowitej jest dopuszczalny, ale do zbioru wszystkich skończonych liczb naturalnych zasady Leibniza zastosować się nie da, gdyż biorąc kres górny tego zbioru (co zawsze da się zrobić dla ograniczonych zbiorów liczb rzeczywistych), uzyskalibyśmy w wyniku najmniejszą nieskończoną liczbę całkowitą, a więc coś, czego nie ma.

Główne znaczenie analizy niestandardowej to jej rola jako silnego narzędzia dla obecnej i przyszłej matematyki. W zastosowaniach matematyki w zjawiskach naturalnych i ekonomicznych, linia hiperrzeczywista i analiza niestandardowa dostarczają znacznie więcej modeli niż klasyczna struktura rzeczywista. Fizycy często zastępują skończony zbiór atomów bądź cząstek przez zbiór nieskończony. Analiza niestandardowa idzie krok dalej i może zastąpić skończony zbiór zbiorem składającym się z ustalonej całkowitej liczby nieskończonej. Zasady skończonej kombinatoryki nadal mają tu zastosowanie i na przykład prawdopodobieństwa interesujących fizyków zdarzeń są łatwe do obliczenia.

Autor tego artykułu interesuje się badaniem rozrzedzonych gazów, dziedziną fizyki matematycznej o skomplikowanych równaniach, w których siły (np. grawitacyjne) pomiędzy cząsteczkami gazu dochodzą do nieskończoności, a czas, w jakim wzbudzony ruch stabilizuje się, staje się nieskończony. Moc analizy niestandardowej w odniesieniu do wielkości nieskończonych pozwalała mi niejednokrotnie znajdować rozwiązania równań gazu, a także badać jego graniczne zachowanie, gdy czas dążył do nieskończoności. Przywołując idee związane z zasadą przejścia, moje rezultaty otrzymywały znaczenie i interpretację w ramach tradycyjnego podejścia, choć często okazywało się niezwykle trudne otrzymanie jakichkolwiek wstępnych wyników przy użyciu metod klasycznych.

Słynny matematyk Kurt Gödel postrzegał analizę niestandardową jako matematykę XXI wieku. Mamy już rok 2004, ale w społeczności matematyków wciąż nie jest ona w powszechnym użyciu. Dzisiejsi matematycy są bowiem zazwyczaj wyspecjalizowani i niewielu czuje się równie dobrze zarówno w zakresie logiki matematycznej, jak i w obszarze zastosowań. Jednakże analiza niestandardowa ze swą ogromną mocą niewątpliwie zasługuje na to, by znaleźć się wśród podstawowych metod stosowanych przez matematyków nadchodzących pokoleń.

Tłumaczył Witold SADOWSKI



Rozwiązanie zadania M 1067.
Z warunków zadania wynika, że $\sphericalangle C = 60^\circ$. Niech E będzie rzutem prostokątnym punktu B na bok AC (rys.). Z równości $\sphericalangle BAE = 45^\circ$ uzyskujemy $BA^2 = 2 \cdot BE^2$, natomiast z równości $\sphericalangle BCE = 60^\circ$ wnioskujemy, że $BE^2 = \frac{3}{4} \cdot BC^2$. W efekcie mamy

$$BC^2 = \frac{2}{3} \cdot BA^2 = BD \cdot BA.$$

Zależność ta wraz z oczywistą równością $\sphericalangle DBC = \sphericalangle CBA$ dowodzi, że trójkąty DBC oraz CBA są podobne. Stąd $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BCA = 60^\circ$.