Złośliwe świnki

Jacek JAKUBOWSKI, Rafał SZTENCEL

W dziale naukowym jednej z gazet pojawiło się następujące zadanie:

> *Jest sto skarbonek* (to tytułowe świnki) *z kluczykami. Każdy kluczyk pasuje tylko do jednej skarbonki. Skarbonki zamykamy, a wymieszane losowo kluczyki wrzucamy po jednym do każdej skarbonki. Teraz tłuczemy jedną skarbonkę, a wyjętym z niej kluczykiem otwieramy następną, etc. Jaka jest szansa, że pozostałe skarbonki uda się otworzyć bez rozbijania?*

Do wyboru były cztery odpowiedzi:
a) 0, b) 1/100, c) 1/2, d) 1. Wielu czytelników uważało jednak, że żadna z podanych odpowiedzi nie jest prawdziwa, na ogół z powodu skojarzenia z dobrze znanym zadaniem o kapeluszach: jeśli n osób włoży losowo n kapeluszy, to z prawdopodobieństwem równym

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots\pm\frac{1}{n!}\approx\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0{,}37$$

żadna z nich nie będzie miała swojego kapelusza na głowie.

Co gorsza, piszący te słowa obserwowali to zjawisko na sobie i swoich studentach. Pierwszym odruchem była uwaga: *aha, jeśli żaden kluczyk nie znajdzie się w skarbonce, którą otwiera, to otworzymy po kolei wszystkie*. Owszem, jest to warunek konieczny, ale nie dostateczny. Otóż operacja uda się wtedy i tylko wtedy, gdy kluczyk od rozbitej skarbonki pojawi się na końcu. A szansa na to – ze względu na symetrię – jest równa 1/100.

Gdyby ktoś nie wierzył, może rozwiązać zadanie formalnie. Rozważmy n skarbonek. Zdarzeniami elementarnymi, które uznajemy za jednakowo prawdopodobne, są n-elementowe ciągi kluczyków. Takich ciągów jest $n!$, zdarzeniami sprzyjającymi są zaś te, w których kluczyk od rozbitej skarbonki pojawia się na końcu. Jest ich $(n-1)!$, stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}.$$

Niestety, właściwe rozwiązanie przychodzi zwykle do głowy poniewczasie. Świnki są naprawdę złośliwe. Dlatego będziemy je tłuc bardziej intensywnie.

Załóżmy, że w chwili pojawienia się kluczyka niepasującego do żadnej skarbonki tłuczemy kolejną. Ile *średnio* trzeba stłuc skarbonek, by otworzyć wszystkie?

Czytelnik może spróbować odgadnąć rząd wielkości. Średnia jest zaskakująco nieduża i wynosi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}\approx 5{,}187.$$

Dla n skarbonek średnia, którą oznaczymy przez e_n, jest równa n-tej sumie częściowej szeregu harmonicznego:

$$e_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma,$$

gdzie $\gamma\approx 0{,}577$ jest stałą Eulera. Jak widać, e_n rośnie wraz z n dość powoli.

Jak uzyskać ten wynik?

Sposób 1. Jeśli stłuczemy pierwszą świnkę, to pasujący do niej kluczyk ma równe szanse pojawienia się jako pierwszy, drugi, itd. Wtedy zadanie sprowadza się do otwarcia pozostałych $n-1$, $n-2$, itd. skarbonek w ten sam sposób. Dlatego

$$e_n=\frac{1}{n}(e_0+\ldots+e_{n-1})+1,\quad n\geqslant 1,\qquad e_0=0.$$

Mamy zatem dla $n\geqslant 1$:

(1) $$ne_n=(e_0+\ldots+e_{n-1})+n,$$

(2) $$(n-1)e_{n-1}=(e_0+\ldots+e_{n-2})+n-1.$$

Z równania (2) wynika, że

(3) $$ne_{n-1}=(e_0+\ldots+e_{n-1})+n-1,$$

i odjęcie stronami (3) od (1) daje $n(e_n-e_{n-1})=1$, czyli $e_n-e_{n-1}=1/n$ dla $n=1,2,\ldots$ Ostatecznie

$$e_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Jak zwykle, poniewczasie wpadamy na inny pomysł, prowadzący do prostszych rachunków.

Sposób 2. Po stłuczeniu pierwszej świnki mamy szansę $1/n$ znalezienia tam pasującego do niej kluczyka; wtedy pozostaje do otwarcia średnio e_{n-1} skarbonek. W przeciwnym razie jesteśmy w stanie otworzyć kolejną skarbonkę (nie musimy jej tłuc), zatem pozostaje średnio $e_{n-1}-1$ skarbonek do otwarcia. Stąd równanie:

$$e_n=\frac{1}{n}(1+e_{n-1})+\left(1-\frac{1}{n}\right)(1+e_{n-1}-1)=$$

$$=\frac{1}{n}(1+e_{n-1})+\left(1-\frac{1}{n}\right)e_{n-1}=\frac{1}{n}+e_{n-1}.$$

Rozwiązując zadanie, korzystaliśmy tak naprawdę z pojęcia warunkowej wartości oczekiwanej. Przypomnijmy, że zwykła wartość oczekiwana dla zmiennej losowej przyjmującej skończenie wiele wartości $x_1,\ldots x_n$ jest dana wzorem

(4) $$EX=\sum_{k=1}^{n}x_iP(X=x_i).$$

Jeśli teraz wprowadzimy zdarzenie A (takie, że $P(A)>0$) i zastąpimy we wzorze (4) zwykłe prawdopodobieństwo przez warunkowe, otrzymamy średnią wartość X na A:

(5) $$E(X|A)=\sum_{k=1}^{n}x_kP(X=x_k|A).$$

Jeżeli dane jest rozbicie $\mathcal{F}$ przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω na zdarzenia $A_1,\ldots,A_m$, to definiujemy warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem $\mathcal{F}$ jako zmienną losową, która przyjmuje wartości $E(X|A_i)$ na A_i:

(6) $$E(X|\mathcal{F})(\omega)=E(X|A_i),\quad \omega\in A_i,\quad i=1,2,\ldots m.$$

Wtedy można łatwo udowodnić odpowiednik wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$E(E(X|\mathcal{F})) = EX. \tag{7}$$

Oto dowód:

$$E(E(X|\mathcal{F})) = \sum_{i=1}^{m} E(X|A_i) \cdot P(A_i) = \tag{8}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k|A_i) \cdot P(A_i) = \tag{9}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} x_k P(X = x_k|A_i) \cdot P(A_i)\right] = \tag{10}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) = EX. \tag{11}$$

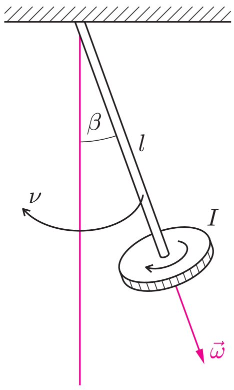
Wyrażenie (9) otrzymaliśmy, korzystając z (5). Po zamianie kolejności sumowania równość wyrażeń (10) i (11) wynika oczywiście ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Dwa rozwiązania zadania o średniej liczbie stłuczonych świnek ilustrują typowe zastosowania wzoru (7), który umożliwia układanie równań. Mieliśmy do czynienia z dwoma rozbiciami przestrzeni Ω na (wykluczające się!) zdarzenia: w sposobie 1 ze względu na chwilę pojawienia się kluczyka od pierwszej stłuczonej świnki, w sposobie 2 – ze względu na to, czy miała w środku swój kluczyk, czy też nie. Można było łatwo odgadnąć, bez zbędnych formalizmów, czemu są równe średnie $E(X|A_i)$.

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 621. Samolot naddźwiękowy poruszający się z prędkościąv $v > c$ (gdzie c to prędkość dźwięku w otaczającym gazie) leci wpierw prosto, potem skręca, zachowując tę samą prędkość. O jaki kąt α musi skręcić samolot, by „usłyszeć” własną falę uderzeniową?
Rozwiązanie na str. 8

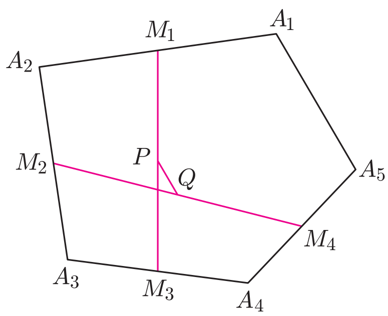


F 622. Wahadło składa się ze sztywnego, nieważkiego pręta o długości l i wirującego z dużą prędkością ω krążka o masie m i momencie bezwładności I zamocowanego na dole (rysunek). Wahadło wykonuje swobodne, jednostajne obroty wokół osi pionowej odchylone o kąt β od pionu. Jaka jest prędkość kątowa ν tych obrotów?
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Waldemar POMPE

M 1063. Zbiór A zawarty w odcinku o długości 1 składa się z pewnej liczby rozłącznych odcinków. Wiadomo, że odległość dowolnych dwóch punktów zbioru A jest różna od 1/10. Wykazać, że łączna długość odcinków ze zbioru A nie przekracza 1/2.
Rozwiązanie na str. 6

M 1064. Punkty M_1, M_2, M_3 i M_4 są odpowiednio środkami boków A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 i A_4A_5 pięciokąta wypukłego $A_1A_2A_3A_4A_5$.



Punkty P i Q są odpowiednio środkami odcinków M_1M_3 i M_2M_4. Wykazać, że proste PQ i A_1A_5 są równoległe oraz $PQ = \frac{1}{4}\,A_1A_5$.
Rozwiązanie na str. 8

M 1065. Ciąg $d_1, d_2, d_3, \ldots$ liczb całkowitych dodatnich jest zdefiniowany w ten sposób, że dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, liczba d_{n+1} jest liczbą dodatnich dzielników liczby d_n. Rozstrzygnąć, dla jakich wartości $d_1 > 1$ ciąg (d_n) nie zawiera kwadratów liczb całkowitych.
Rozwiązanie na str. 7