Wtedy można łatwo udowodnić odpowiednik wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

(7) $$E(E(X|\mathcal{F})) = EX.$$

Oto dowód:

(8) $$E(E(X|\mathcal{F})) = \sum_{i=1}^{m} E(X|A_i)\cdot P(A_i) =$$

(9) $$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_k P(X=x_k|A_i)\cdot P(A_i) =$$

(10) $$= \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m} x_k P(X=x_k|A_i)\cdot P(A_i)\right] =$$

(11) $$= \sum_{k=1}^{n} x_k P(X=x_k) = EX.$$

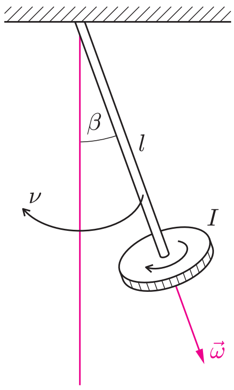
Wyrażenie (9) otrzymaliśmy, korzystając z (5). Po zamianie kolejności sumowania równość wyrażeń (10) i (11) wynika oczywiście ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Dwa rozwiązania zadania o średniej liczbie stłuczonych świnek ilustrują typowe zastosowania wzoru (7), który umożliwia układanie równań. Mieliśmy do czynienia z dwoma rozbiciami przestrzeni Ω na (wykluczające się!) zdarzenia: w sposobie 1 ze względu na chwilę pojawienia się kluczyka od pierwszej stłuczonej świnki, w sposobie 2 – ze względu na to, czy miała w środku swój kluczyk, czy też nie. Można było łatwo odgadnąć, bez zbędnych formalizmów, czemu są równe średnie $E(X|A_i)$.

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 621. Samolot naddźwiękowy poruszający się z preędkościąu $v > c$ (gdzie c to prędkość dźwięku w otaczającym gazie) leci wpierw prosto, potem skręca, zachowując tę samą prędkość. O jaki kąt α musi skręcić samolot, by „usłyszeć” własną falę uderzeniową?
Rozwiązanie na str. 8

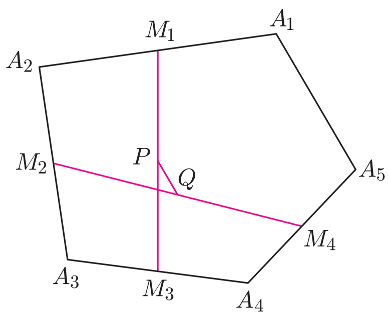


F 622. Wahadło składa się ze sztywnego, nieważkiego pręta o długości l i wirującego z dużą prędkością ω krążka o masie m i momencie bezwładności I zamocowanego na dole (rysunek). Wahadło wykonuje swobodne, jednostajne obroty wokół osi pionowej odchylone o kąt β od pionu. Jaka jest prędkość kątowa ν tych obrotów?
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Waldemar POMPE

M 1063. Zbiór A zawarty w odcinku o długości 1 składa się z pewnej liczby rozłącznych odcinków. Wiadomo, że odległość dowolnych dwóch punktów zbioru A jest różna od 1/10. Wykazać, że łączna długość odcinków ze zbioru A nie przekracza 1/2.
Rozwiązanie na str. 6

M 1064. Punkty M_1, M_2, M_3 i M_4 są odpowiednio środkami boków A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 i A_4A_5 pięciokąta wypukłego $A_1A_2A_3A_4A_5$.



Punkty P i Q są odpowiednio środkami odcinków M_1M_3 i M_2M_4. Wykazać, że proste PQ i A_1A_5 są równoległe oraz $PQ = \frac{1}{4}\,A_1A_5$.
Rozwiązanie na str. 8

M 1065. Ciąg $d_1, d_2, d_3, \ldots$ liczb całkowitych dodatnich jest zdefiniowany w ten sposób, że dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, liczba d_{n+1} jest liczbą dodatnich dzielników liczby d_n. Rozstrzygnąć, dla jakich wartości $d_1 > 1$ ciąg (d_n) nie zawiera kwadratów liczb całkowitych.
Rozwiązanie na str. 7