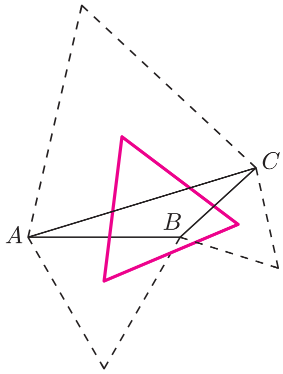
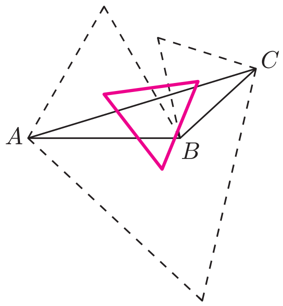
Twierdzenie Napoleona

Zbigniew BLAJERSKI

Jeśli na bokach dowolnego trójkąta zbudujemy trójkąty równoboczne tak, by albo każdy z nich miał wnętrze rozłączne z wnętrzem danego trójkąta (mówimy wtedy o przypadku zewnętrznym – rysunek 1*), albo każdy z nich miał wnętrze nierozłączne z wnętrzem danego trójkąta (przypadek wewnętrzny – rysunek* 2*), to okaże się, że środki tych zbudowanych trójkątów będą wierzchołkami trójkąta równobocznego.*



Rys. 1



Rys. 2

Fakt ten jest znany pod nazwą twierdzenia Napoleona, choć jego związek z Cesarzem Francuzów jest niejasny.

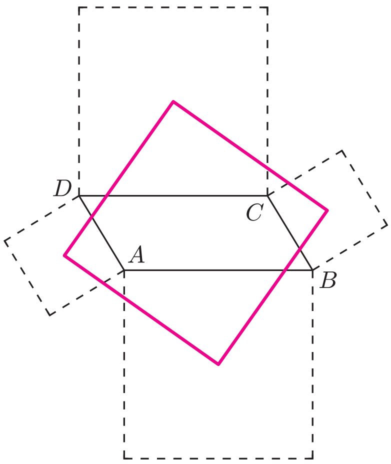
Nie jest jednak prawdziwe proste uogólnienie tego faktu: jeśli na bokach dowolnego n-kąta zbudujemy n-kąty foremne, to ich środki nie muszą być wierzchołkami n-kąta foremnego. Powstaje w związku z tym pytanie, przy jakich najsłabszych dodatkowych założeniach można to twierdzenie uogólnić. Problem ten dla $n = 4$ i $n = 6$ został w 1952 roku rozwiązany przez włoskiego matematyka Adriano Barlottiego.

A. Barlotti, *Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo ad triangolo*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 7 (1952), 182–185.

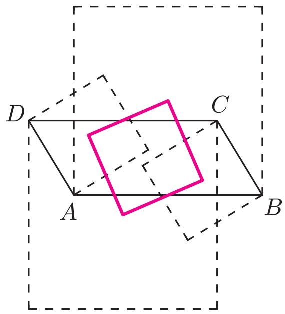
Oto ten rezultat.

Twierdzenie 1. *Środki kwadratów zbudowanych (zewnętrznie lub wewnętrznie) na bokach czworokąta są wierzchołkami kwadratu wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt ten jest równoległobokiem* (rys. 3, rys. 4).

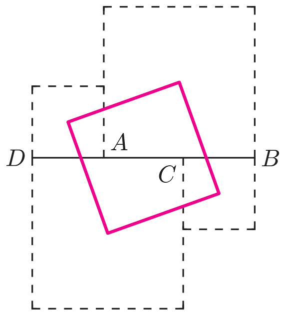
Można tu dopuścić (podobnie jak we wszystkich innych przypadkach) również sytuację zdegenerowaną – rysunek 5.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Twierdzenie 2. *Środki sześciokątów foremnych zbudowanych na bokach sześciokąta $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ są wierzchołkami sześciokąta foremnego wtedy i tylko wtedy, gdy główne przekątne P_iP_{i+3} przecinają się w jednym punkcie i są równoległe do boków $P_{i+1}P_{i+2}$ i $P_{i+4}P_{i+5}$ (indeksy modulo* 6*).*

W trzy lata później Barlotti analitycznie (posługując się liczbami zespolonymi) znalazł warunek, który pozwala na sformułowanie odpowiednika twierdzenia Napoleona dla dowolnego $n \geqslant 3$.

A. Barlotti, *Una proprietà degli n-agoni che si ottengono transformando in una affinità un n-agono regolare*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 10 (1955), 96–98.

Rozwiązanie zadania M 1063. Przyjmijmy, że $I = [0, 1]$ jest danym odcinkiem o długości 1. Rozpatrzmy 10 odcinków:

$$I_k = \left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right] \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, 9).$$

Dodając 1/10 do każdej liczby ze zbioru $A \cap I_{2i}$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, przesuwamy ten zbiór o 1/10 w prawo. Otrzymujemy w ten sposób podzbiór przedziału I_{2i+1}, który jest *rozłączny* ze zbiorem A. Stąd wynika, że łączna długość odcinków ze zbioru A nie przekracza połowy długości odcinka I, czyli 1/2.

Mianowicie prawdziwe jest

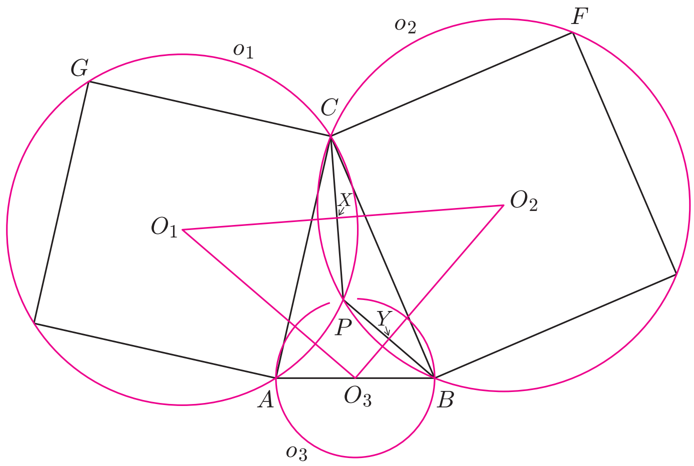
Twierdzenie 3. *Środki n-kątów foremnych zbudowanych na bokach pewnego n-kąta są wierzchołkami n-kąta foremnego wtedy i tylko wtedy, gdy ten n-kąt jest obrazem n-kąta foremnego w jakimś przekształceniu afinicznym.*

Zapewne istnieją proste geometryczne dowody twierdzenia 3. Tu chciałem przedstawić jedynie geometryczny dowód twierdzenia dla czworokąta, przy czym będę rozważał tylko przypadek, gdy kwadraty budowane są zewnętrznie, bo dla pozostałych przypadków (łącznie ze zdegenerowanym) dowód jest analogiczny.

Dogodnie jest posłużyć się następującym lematem.

Lemat. *Jeśli na dwóch bokach trójkąta zbudujemy (zewnętrznie) kwadraty, to okręgi o_1 i o_2 na nich opisane przecinają się na okręgu o_3, którego średnicą jest trzeci bok trójkąta; ponadto środki tych okręgów są wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.*

Dowód lematu. Niech P będzie drugim poza C (oznaczenia z rysunku 6) punktem przecięcia o_1 i o_2.



Rys. 6

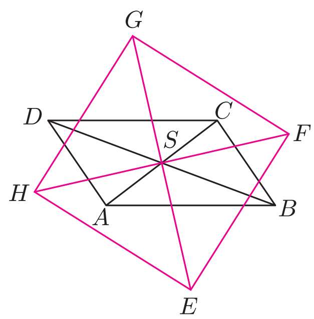
Mamy $\sphericalangle CGA = \sphericalangle CFB = 45°$, więc $\sphericalangle CPA = \sphericalangle CPB = 135°$. Zatem

$$\sphericalangle APB = 360° - 2 \cdot 135° = 90°,$$

czyli punkt P leży także na o_3. Druga część tezy wynika z faktu, że O_1O_3 i O_2O_3 są symetralnymi przyprostokątnych trójkąta APB, a więc są prostopadłe. Podobnie O_1O_2 jest symetralną CP, a więc w czworokącie PXO_2Y mamy

$$\sphericalangle O_1O_2O_3 = \sphericalangle XO_2Y = 360° - 2 \cdot 90° - 135° = 45°.$$

Dowód twierdzenia 1 w wersji zewnętrznej. Załóżmy, że $ABCD$ jest równoległobokiem, a E, F, G, H – środkami kwadratów zbudowanych na jego bokach (rys. 7).



Rys. 7

Wobec lematu czworokąt $EFGH$, jako złożony z czterech jednakowych trójkątów prostokątnych równoramiennych, jest kwadratem.

Załóżmy z kolei, że $EFGH$ jest kwadratem. Wobec lematu zastosowanego do trójkątów ABC i BCD punkt S jest środkiem zarówno AC, jak BD. Zatem czworokąt $ABCD$ ma środek symetrii, czyli jest równoległobokiem.

Podobnie dowodzi się twierdzenia 2.

Proponuję jednak Czytelnikom zmierzenie się z innymi przypadkami twierdzenia 3, a może nawet znalezienie elementarnego geometrycznego dowodu tego twierdzenia w pełnej ogólności.

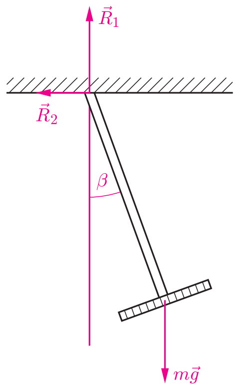
Przekształcenie afiniczne to takie, które zachowuje linie proste.

Rozwiązanie zadania M 1065.
Wykażemy, że podany ciąg nie zawiera kwadratów liczb całkowitych jedynie wtedy, gdy d_1 jest liczbą pierwszą.

Jeśli d_1 jest liczbą pierwszą, to wszystkie pozostałe wyrazy tego ciągu są równe 2, a zatem ciąg ten nie zawiera żadnego kwadratu.

Przyjmijmy, że $d_1 > 2$ jest liczbą złożoną. Oczywiście $d_{n+1} \leqslant d_n$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $d_n = 2$. Zatem dla pewnego $k \geqslant 3$ mamy $d_k = 2$ oraz $d_{k-1} \neq 2$. Wówczas d_{k-1} jest liczbą pierwszą nieparzystą, co z kolei oznacza, że d_{k-2} jest kwadratem liczby całkowitej. Gdyby bowiem d_{n-2} nie było kwadratem, to wszystkie jego dzielniki można by połączyć w pary $(k, d_{n-2}/k)$, gdzie $k < \sqrt{d_{n-2}}$.

Rozwiązanie zadania F 622.
Długość wektora pochodnej momentu bezwładności wahadła względem czasu to $I\omega\nu \sin\beta$.



Zmiana ta wywoływana jest przez moment siły reakcji $\vec{R}$ względem środka masy wahadła:

$$lR_1 \sin\beta - lR_2 \cos\beta.$$

Pionowa składowa siły reakcji równoważy ciężar wahadła:

$$R_1 = mg,$$

pozioma wywołuje ruch dookoła środka masy:

$$R_2 = ml \sin\beta\nu^2.$$

Po przyrównaniu pochodnej momentu bezwładności i sumy momentów sił otrzymujemy zależność

$$I\omega \sin\beta\, \nu = mgl \sin\beta - ml^2 \sin\beta \cos\beta\nu^2,$$

czyli

$$\nu = \frac{I\omega \pm \sqrt{I^2\omega^2 + m^2gl^3 \cos\beta}}{2ml^2 \cos\beta}.$$