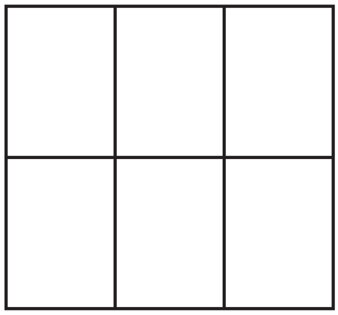
Czyszczenie ulic

Od czasu do czasu w mieście trzeba wyczyścić ulice. Służy do tego specjalny pojazd wyposażony w szczotki i natryski. Chodzi o to, by tak zaplanować trasę pojazdu, by wyczyścić wszystkie ulice w mieście, przejechawszy możliwie najmniej i niekoniecznie wracając do punktu wyjścia. W końcu zawsze można wybudować dwie bazy pojazdów czyszczących. U nas miasto będzie prostokątne, a kwartały będą jednakowymi kwadratami, powiedzmy o boku 1 km.

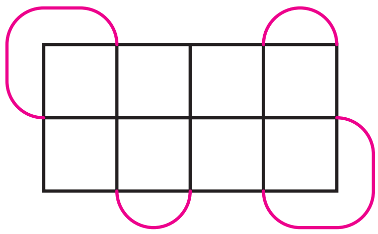
Na przykład na rysunku 1 miasto jest prostokątem 2 na 3 km, a system ulic składa się z siedemnastu jednokilometrowych odcinków dzielących miasto na 6 kwartałów.



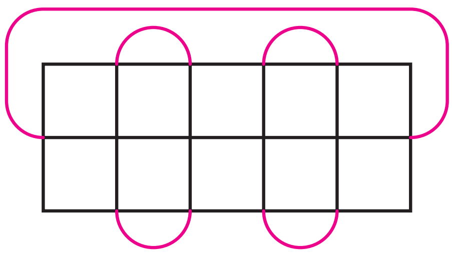
Rys. 1

Zachęcam Czytelnika do samodzielnego wyznaczenia optymalnej trasy. Wcale nie wydaje się to łatwe. Wszystko jednak wyjaśnia się, gdy zastosować trochę matematyki. Po pierwsze, potraktujmy ulice i skrzyżowania jako krawędzie i wierzchołki grafu. Klucz do rozwiązania problemu to stopnie wierzchołków, czyli liczby, które mówią, ile ulic (krawędzi) zbiega się w jednym skrzyżowaniu (wierzchołku). Miasto z rysunku 1 ma 4 wierzchołki stopnia 2, są to wierzchołki prostokąta, 6 wierzchołków stopnia 3 leżących na bokach prostokąta oraz 2 wierzchołki stopnia 4 leżące we wnętrzu prostokąta. Gdyby wszystkie wierzchołki miały stopnie parzyste, to można by wyczyścić wszystkie ulice, każdą przejechawszy dokładnie jeden raz i na koniec znaleźć się w punkcie wyjścia. I na odwrót, taka sztuka może się powieść w grafie jedynie wtedy, gdy wszystkie wierzchołki grafu mają parzyste stopnie. Powyższe dwa zdania stanowią treść twierdzenia Eulera, które nietrudno udowodnić. Widać więc, że w naszym mieście niektóre ulice trzeba będzie wyczyścić co najmniej dwukrotnie. Przypuśćmy, że znamy optymalną trasę pojazdu czyszczącego. Jeśli owa trasa dwukrotnie wiedzie tą samą ulicą, połączmy wierzchołki tej ulicy dodatkową krawędzią. Jeśli trzykrotnie, dodajemy dwie krawędzie itd. Postępujemy tak z każdą ulicą przejeżdżaną wielokrotnie. Nietrudno zauważyć, że tak zmodyfikowaną sieć ulic można objechać bez powtórzeń. Po prostu zamiast powtarzać wybieramy jedną z dodanych krawędzi. Zatem graf, który otrzymujemy po modyfikacji, ma wyłącznie wierzchołki stopnia parzystego. Stąd nietrudno wydedukować, że liczba dodanych krawędzi to przynajmniej połowa liczby wierzchołków nieparzystego stopnia. W poszukiwaniu optymalnej trasy można odwrócić powyższe rozumowanie. Najpierw dodajmy tyle krawędzi, by każdy wierzchołek był stopnia parzystego, po czym każdą dodaną krawędź zastępujemy możliwie krótką drogą prawdziwymi ulicami miasta. Na szczęście jedną z dodatkowych krawędzi można pominąć, bo pojazd może przecież zacząć czyszczenie w jednym wierzchołku tej krawędzi, a skończyć w drugim. Oczywiście, pomijamy krawędź najdłuższą. Strategia dodawania dodatkowych krawędzi, a zatem również wyznaczania optymalnej trasy, będzie zależała od parzystości wymiarów miasta.

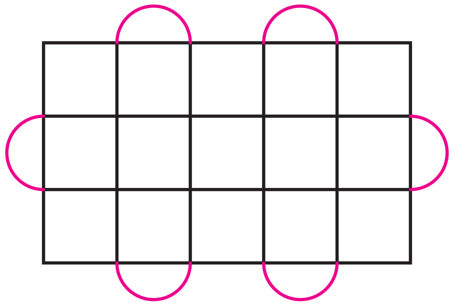
Rysunek 2 pokazuje, co należy zrobić, gdy miasto ma parzystą długość i szerokość (a), jeden wymiar nieparzysty (b) oraz oba wymiary nieparzyste (c).



(a)



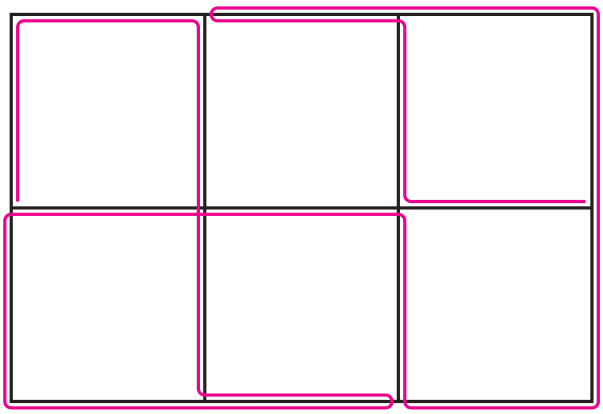
(b)



(c)

Rys. 2

Nietrudno przekonać się, że rysunek 2 pokazuje, jak wyznaczyć optymalne trasy poprzez dodanie dodatkowych krawędzi.
W przypadku (a), gdy oba wymiary, powiedzmy n i k, są parzyste, trzeba będzie nadłożyć $n + k - 2$ kilometrów, w przypadku (b), gdy n jest parzyste, a k nieparzyste, nadkładamy $n + k - 3$ kilometrów, a w przypadku (c) $n + k - 1$ kilometrów. Zatem żeby wyczyścić ulice miasta z rysunku 1, potrzeba i wystarczy przejechać 19 km. Rysunek 3 przedstawia jedną z możliwych tras.



Rys. 3

Małą Deltę przygotował Krzysztof PAWŁOWICZ