Przekątna Cantora

Michel MENDÈS FRANCE, Francja

Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny, co oznacza, że wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg.

Rozważmy tablicę nieskończoną T, której każdy wiersz przedstawia rozwinięcie dziesiętne pewnej liczby wymiernej z przedziału $(0,1)$. Przypuśćmy, że zapisaliśmy w ten sposób wszystkie liczby wymierne ze wspomnianego przedziału, a jeśli któraś ma podwójną reprezentację, uwzględniliśmy obie. Tak więc na przykład pewien wiersz tablicy będzie miał postać $1\ 1\ 9\ 9\ 9\ 9\ldots$, a w innym wierszu pojawi się także $1\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ldots$. Będziemy pisali

$$T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \ldots \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \ldots \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

gdzie a_i^j jest jedną z cyfr $0,1,2,\ldots,8,9$.

Twierdzenie 1. Liczba, której cyfry dziesiętne są wzięte z przekątnej $x = 0{,}a_1^1a_2^2a_3^3\ldots$ jest niewymierna.

Dowód. Niech f będzie przekształceniem wzajemnie jednoznacznym zbioru $\{0,1,2,\ldots,8,9\}$ w siebie. Przyjmijmy, że f nie ma punktu stałego, tzn. dla każdego $a \in \{0,1,2,\ldots,8,9\}$, $f(a) \neq a$. Na przykład $f(a) = a+1$ dla $0 \leqslant a \leqslant 8$ i $f(9) = 0$. Rozważmy tablicę T' otrzymaną z T przez zastąpienie a_k^k przez $f(a_k^k)$, dla $k = 1,2,3,\ldots$. Wtedy ciąg $f(a_1^1)f(a_2^2)\ldots$ nie może być wierszem tablicy T, bo w przeciwnym razie, dla pewnego k byłoby

$$a_k^1a_k^2a_k^3\ldots a_k^k\ldots = f(a_1^1)f(a_2^2)\ldots f(a_k^k)\ldots$$

co jest niemożliwe, gdyż oba ciągi różnią się na k-tym miejscu. A zatem ciąg $f(a_1^1)f(a_2^2)f(a_3^3)\ldots$ nie należy do zbioru wierszy T, a więc reprezentuje liczbę niewymierną. Nietrudno zauważyć, że, ogólnie, ciąg $f(b_1)f(b_2)f(b_3)\ldots$ jest od pewnego miejsca okresowy wtedy i tylko wtedy, gdy własność tę ma ciąg $b_1b_2b_3\ldots$.

Już ze szkoły znamy charakteryzację liczb wymiernych: są to dokładnie te liczby, których rozwinięcia (przy dowolnej podstawie większej od 1) są od pewnego miejsca okresowe.

Stąd wnioskujemy, że również przekątna $a_k^1a_k^2a_k^3\ldots$ macierzy T reprezentuje liczbę niewymierną.

QED

Twierdzenie 2. Liczba $x = 0{,}a_1^1a_2^2a_3^3\ldots$ zawiera każdą cyfrę nieskończenie wiele razy.

Dowód. Dla otrzymania sprzeczności przypuśćmy, że cyfra 7 (na przykład) występuje tylko skończenie wiele razy. Niech g będzie przekształceniem zbioru $\{0,1,2,\ldots,8,9\}$ w siebie określonym przez $g(7) = 0$ i $g(a) = 7$, dla każdego $a \neq 7$. Jak poprzednio, przekształcenie nie ma punktu stałego, choć tym razem nie jest wzajemnie jednoznaczne. Niech T'' będzie tablicą otrzymaną z T przez zastąpienie a_k^k przez $g(a_k^k)$, dla $k = 1,2,3,\ldots$. Jak poprzednio, liczba $0,g(a_1^1)g(a_2^2)g(a_3^3)\ldots$ nie może być wierszem T. Ta liczba powinna zatem być niewymierna. Z drugiej strony, skoro od pewnego miejsca $a_k^k \neq 7$, mamy (od pewnego miejsca) $g(a_k^k) = 7$ i w konsekwencji $0,g(a_1^1)g(a_2^2)g(a_3^3)\ldots$ jest wymierna. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że 7 występuje nieskończenie często w rozwinięciu dziesiętnym liczby x.

QED

Rozwiązanie zadania F 620.
Jeśli samolot nie może startować pionowo, to maksymalna siła ciągu jego silników musi być mniejsza od jego ciężaru

$$T < mg$$

Podczas lotu poziomego ze stałą prędkością opory ruchu równoważą się z ciągiem

$$\kappa v_p^2 = T$$

a podczas pikowania w dół z ciągiem i ciężarem

$$\kappa v_d^2 = T + mg$$

stąd $\kappa v_d^2 > 2T$ i $v_d > \sqrt{2}\,v_p \approx 1270$ km/h, czyli więcej niż prędkość dźwięku m. Należy zaznaczyć, że dla prędkości bliskich m i większych zależność oporu od prędkości jest w rzeczywistości bardziej skomplikowana.

Uwaga 1. Rozważmy powyższą tablicę T i wszystkie tablice, jakie można otrzymać permutując dowolnie jej wiersze. Zbiór przekątnych wszystkich tych tablic jest więc pewnym zbiorem liczb niewymiernych E. Twierdzenie 2 pokazuje, że na ogół E jest właściwym podzbiorem $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (0,1)$. Jest jasne, że rozumowania powyższe zachowują swą słuszność dla rozwinięć przy dowolnej podstawie. Niemniej jednak, przy podstawie 2 można wykazać, że $E = (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (0,1)$.

Uwaga 2. Można także zastąpić „liczby wymierne" przez „liczby algebraiczne" i „liczby niewymierne" przez „liczby przestępne"…, a także wyobrazić sobie wiele innych wariantów, choć dowody trzeba będzie zmodyfikować.

Tłumaczył Damian NIWIŃSKI