Europejskie zakupy ze zniżką

Giorgio BUSONI, Włochy

Jak wiadomo Unia Europejska składała się dotąd z 15 państw. Są to Belgique, Deutschland, Eire, Ελλάδα, España, Finland, France, Italia, Lëtzebuerg, Nederland, Österreich, Portugal, Danmark, Sverige oraz United Kingdom. Pierwszych dwanaście państw ma wspólną walutę: euro. Siedem banknotów (5; 10; 20; 50; 100; 200; 500 euro) i osiem monet (1; 2; 5; 10; 20; 50 eurocentów; 1; 2 euro) jest obecnie w użyciu. Monety danej wartości mają jedną stronę identyczną we wszystkich krajach, natomiast druga strona jest ilustrowana portretami sławnych osób, pomników, dzieł sztuki, instrumentów, zwierząt czy też roślin charakterystycznych dla danego kraju. Jest więc np. 12 różnych monet wartości 1 euro i 12 różnych monet 5-centowych. W każdym sklepie w 12 wymienionych krajach płaci się w euro.

1. Zdarzyło mi się kiedyś, że kupiłem towary ze zniżką 20, 30 i 40 procent. Oto lista towarów i ich nieobniżonych cen (w euro)

A 1,49; B 0,80; C 6,62; D 2,87; E 7,94; F 0,83; G 2,60; H 16,90.

Zyskałem 0,30 euro na obniżce 20 procent, 8,82 euro na obniżce 30 procent i wreszcie 3,70 euro na obniżce 40 procent. Czy potraficie odgadnąć, jakie produkty kupiłem z jaką zniżką? (Pamiętajcie, że kasy w sklepie zaokrąglają liczby.)

2. Zbieram różne monety. Chciałbym mieć ich wszystkie rodzaje. Teraz mam niemal 79 procent ich wszystkich, przy czym mam wszystkie monety z następujących państw: Deutschland, Eire, España, France, Österreich oraz Italia. Mam dwanaście monet 2 euro, ale niestety nie mam żadnych innych kompletów monet tej samej wartości. Brakuje mi monet na łączną sumę tylko 3,75 euro (głównie monet o małej wartości). Czy możecie wydedukować, ilu monet i jakiej wartości mi brakuje? Żeby nieco pomóc w dociekaniach, powiem tylko, że brakuje mi tyle samo jednocentówek co dwucentówek oraz że gdyby udało mi się dostać trzy właściwe monety, to cała brakująca suma zmiejszyłaby się do 1,25 euro (a ponadto uzyskałbym jeszcze jeden kompletny zestaw monet jednakowej wartości).

Rozwiązania

1. Zauważmy, że 0,30 euro to 20 procent 1,50 euro, 8,82 euro to 30 procent 29,40 euro, a 3,70 euro to 40 procent 9,25 euro. Produkt A kosztuje 1,49 euro, niemal tyle co 1,50 euro; żadna inna możliwa suma cen nie daje nic w pobliżu 1,50 euro; więc produkt A został kupiony z 20 procentową zniżką. Zauważmy teraz, że $6{,}62 + 2{,}60 = 9{,}22$, co daje niemal 9,25. Inne sumy cen bliskie 9,25 to 6,62 + 2,87 = 9,49 oraz 7,94 + 0,80 + 0,83 = 9,57. Różnią się one jednak od 9,25 zbyt mocno. Wreszcie pozostałe ceny dają w sumie 29,34, co jest całkiem bliskie 29,40. Kupione zostały zatem następujące produkty: ze zniżką 20 procent: A; ze zniżką 30 procent: B, D, E, F i H; ze zniżką 40 procent: C oraz G.

2. Wszystkich rodzajów monet jest 96, z czego 79 procent to 76. Brakujące monety mają wartości od 1 centa do 1 euro. Nie tak łatwo podać szybko pełną listę zestawów monet, których łączna wartość daje 3,75 euro. Dodatkowa wskazówka sugeruje, że 2,50 euro to łączna wartość trzech monet, którymi muszą koniecznie być dwie monety o nominałach 1 euro i jedna 50-centówka. A zatem pozostałe 17 brakujących monet mają łączną wartość 1,25 euro. Wśród nich nie może być już monety 1 euro; wyklucza to stwierdzenie, że jedynym kompletnym zbiorem monet jest ten złożony z monet 2 euro. Mamy zatem do rozpatrzenia następujące równania:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f=17, \\ a+2b+5c+10d+20e+50f=125, \\ a=b. \end{cases}$$

Szukamy rozwiązań, które należą do zbioru

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}.$$

Oczywiście f nie może być równe $3,4,\ldots$, etc. Jeśli przyjmiemy $f=2$, to musimy szukać rozwiązań równań

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=15, \\ a+2b+5c+10d+20e=25=V, \end{cases}$$

ale trzeba spostrzec, że drugie równanie (i każde inne reprezentujące całą sumę wartości monet) nie ma rozwiązań, jeśli wielkość V jest mniejsza od sumy współczynników nieznanych wielkości: $1+2+5+\ldots$ Zatem nie ma rozwiązań, gdy $f=2$. Załóżmy więc, że $f=1$. Rozważmy równania

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=16, \\ a+2b+5c+10d+20e=75. \end{cases}$$

Rozpatrzmy przypadki $e=3,2,1$; nie ma sensu rozważać $e\geqslant 4$. Uwaga, jaką niedawno przytoczyliśmy, dowodzi, że e nie jest równe 3. Jeśli $e=2$, to trzeba rozważyć $d=3,2,1$; ale d nie może być równe 3. Jeśli $d=2$, to trzeba rozważyć $c=3,2,1$; i znów korzystając z poczynionego wcześniej spostrzeżenia, dostrzec, że c nie jest równe ani 3, ani 2. Z równości $a=b$ wynika, że $c=1$ nie jest szukanym rozwiązaniem. Rozumując w sposób powyżej opisany spostrzegamy, że jedyne rozwiązanie to

$$\begin{cases} a=b=5, \\ c=2, \\ d=3, \\ e=f=1, \end{cases}$$

co odpowiada monetom, jakich mi brakowało (łącznie z 50 centówką i dwiema monetami po 1 euro): pięciu jednocentówkom, pięciu dwucentówkom, dwóm pięciocentówkom, trzem monetom po 10 eurocentów, jednej dwudziestocentówce, dwóm monetom wartości 50 eurocentów i dwóm monetom 1 euro.

Tłumaczył Witold SADOWSKI