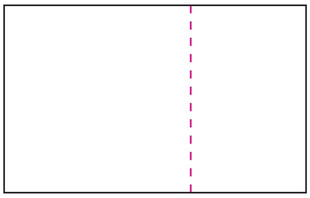
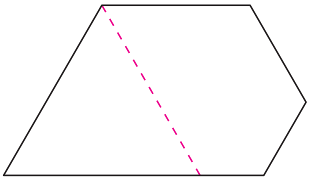
Magiczne liczby foremne

Jan M. AARTS, Holandia



Rys. 1



Rys. 2

W czasach nowożytnych francuski architekt Le Corbusier postulował użycie geometrycznej skali opartej na złotej liczbie w projektach architektonicznych.

Hans van der Laan (1904–1991) urodził się w rodzinie holenderskich architektów. W roku 1923 rozpoczął studia architektoniczne na Politechnice w Delft, by po dwóch latach je porzucić i zostać mnichem w zakonie benedyktynów. Odtąd poświęcał swe życie Bogu i architekturze. Kluczową rolę w jego pracach odegrała tzw. **liczba plastyczna** $p = 1{,}324\ldots$ – pierwiastek równania $1 + x = x^3$. Liczba ta to podstawa przenikającej wszystko geometrycznej skali miar $\ldots, p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2, \ldots$ Porównanie skali geometrycznej ze skalą arytmetyczną wyznaczoną przez liczby naturalne prowadzi do równań, w których k i l to pewne liczby naturalne, x zaś jest niewiadomą liczbą rzeczywistą

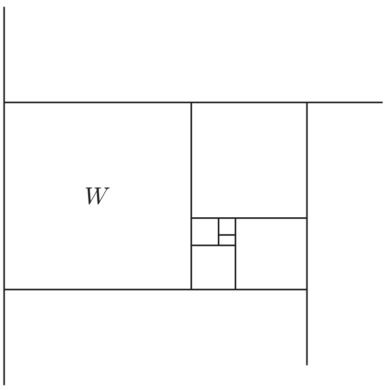
$$(1) \qquad x > 1, \quad x + 1 = x^k, \quad x - 1 = x^{-l}.$$

Liczba rzeczywista x, spełniająca (1) dla pewnych k i l, zwana jest **liczbą foremną**. Łatwo zauważyć, że liczba plastyczna p jest rozwiązaniem (1) dla $k = 3$ oraz $l = 4$, zachodzi bowiem równość

$$x^5 - x^4 - 1 = (x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1).$$

Liczba φ (**złota liczba** $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$) spełnia z kolei równość (1) dla $k = 2$ oraz $l = 1$. Holenderski inżynier Kruijtzer podejrzewał, że φ oraz p to jedyne rozwiązania (1), co okazało się prawdą.

Dowód (J.M. Aarts, R. Fokkink, G. Kruijtzer) jest zbyt skomplikowany, by można go było tu zamieścić. Opiera się na wynikach dwóch matematyków z uniwersytetu w Bergen w Norwegii: Selmer udowodnił, że trójmian $x^n - x - 1$ dla $n \geqslant 3$ jest nierozkładalny, natomiast Tverberg wykazał m.in., że trójmiany $x^m - x^{m-1} - 1$ są dla $m \geqslant 3$ albo nierozkładalne, albo są iloczynami wielomianu nierozkładalnego i trójmianu $x^2 - x + 1$. (Podobne zagadnienie było tematem zadania 3 Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej w 2002 r.)

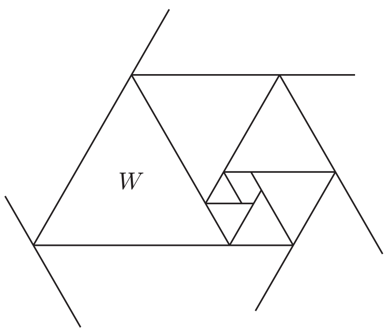


Rys. 3

Bardziej ogólnie mówimy, że wielokąt W jest **gnomonem** wielokąta V (z którym nie ma wspólnych punktów wewnętrznych), jeśli $W \cup V$ jest wielokątem podobnym do V.

Jest wiele podobieństw między liczbą φ oraz liczbą plastyczną p. Złoty prostokąt (czyli prostokąt o bokach 1 oraz φ) ma następującą interesującą własność: jeśli odetniemy od niego kwadrat o boku 1, to pozostanie prostokąt podobny do wyjściowego, zmniejszony o czynnik φ (rys. 1).

Dlatego Gazalé nazywa kwadrat **gnomonem** złotego prostokąta. Srebrny pięciokąt to pięciokąt, którego boki mają długość $1, p, p^2, p^3, p^4$ i którego kąty pomiędzy kolejnymi bokami są równe odpowiednio 120, 120, 120, 60 i 120 stopni. Srebrny pięciokąt ma interesującą własność podobną do opisanej wyżej własności złotego prostokąta: jeśli zostanie z niego wycięty trójkąt równoboczny o boku długości p^3, to pozostała część będzie podobna do pięciokąta wyjściowego w skali $1/p$ (rys. 2). W ten sposób trójkąt równoboczny jest gnomonem srebrnego pięciokąta. Gazalé podejrzewał, że jeśli wielokąt foremny W jest gnomonem wielokąta V, to albo V jest złotym prostokątem, a W kwadratem, albo V jest srebrnym pięciokątem, a W trójkątem. Oto magia liczb foremnych! Przypuszczenie okazało się słuszne (J. Aarts, R. Fokkink), choć przydałby się pewnie prostszy dowód. Dotychczasowy oparty jest na następującym pomyśle. Przypuśćmy, że wielokąt foremny W jest gnomonem wielokąta V. Niech $f : W \cup V \to V$ będzie podobieństwem (złożeniem translacji, obrotu i jednokładności), które dowodzi, że W jest gnomonem V. Podobieństwo f jest zdefiniowane na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i ma punkt stały, powiedzmy punkt q. Wtedy $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ jest sumą zbiorów $\{f^n(W) : n \in Z\}$, tworzących swoisty „parkiet" dla $\mathbb{R}^2 \setminus \{q\}$ (rys. 3 i 4). Wykonując odpowiednie przekształcenia można uzyskać stąd okresowe pokrycie całej płaszczyzny i korzystając z pewnych standardowych w gruncie rzeczy metod można w końcu wykazać, że możliwe są tylko dwa przypadki: jeden odpowiadający złotemu prostokątowi, drugi – srebrnemu pięciokątowi.



Rys. 4

Tłumaczył Witold SADOWSKI