5/04 (77)

$\Gamma \lim_{n\to\infty}$atias

7,11

Z okazji Gammalimatiasu $7 \cdot 11$ pragnę przypomnieć konkurs 7,11, który ogłoszony został w *Delcie* 120 (12/1983). Obecna *Delta* ma numer trzykrotnie większy.

Zadanie w skrócie brzmiało następująco:

John Smith wybrał z obficie zaopatrzonych półek sklepu 7,11 *cztery produkty i niemal natychmiast usłyszał głos kasjera.*

– Płaci pan 7,11.

– Co? Za to? — zapytał.

– 7 *dolarów i* 11 *centów za zakupione towary. Po prostu odnotowałem ceny poszczególnych towarów, pomnożyłem i wyszło* 7,11 *— wyjaśnił kasjer.*

– Panie, toż to trzeba dodać, a nie pomnożyć!

– Istotnie, przepraszam — palce kasjera znów zastukały w klawisze podręcznego komputerka — płaci pan 7,11.

– To są kpiny! — oburzył się John.

– Ależ skąd, proszę sprawdzić.

Zadanie polegało na wyznaczeniu cen poszczególnych produktów zakupionych przez Johna Smitha. Tymi cenami były: 1,20, 1,25, 1,50 oraz 3,16.

Kiedy we wrześniu 2003 roku w Poznaniu Marek Kordos przypomniał mi ten problem z pytaniem, czy aby liczba 7,11 nie jest tu jakąś wyjątkową liczbą, odparłem w ciemno, że pewnie takich liczb jest bez liku, ale dopiero w domu mogłem to rzetelnie sprawdzić.

Szukamy rozwiązań równania

$$a+b+c+d=a\cdot b\cdot c\cdot d$$

w liczbach dodatnich będących wielokrotnościami 0,01.

Łatwiejsza wersja zadania, w której występują tylko dwa produkty, ma 13 istotnie różnych rozwiązań: $4{,}00 = 2{,}00*2{,}00$, $4{,}05=1{,}80*2{,}25$, $4{,}50=1{,}50*3{,}00$, $4{,}90 = 1{,}40*3{,}50$, $6{,}25=1{,}25*5{,}00$, $7{,}20=1{,}20*6{,}00$, $8{,}41 = 1{,}16*7{,}25$, $12{,}10=1{,}10*11{,}00$, $14{,}58=1{,}08*13{,}50$, $22{,}05=1{,}05*21{,}00$, $27{,}04=1{,}04*26{,}00$, $52{,}02 = 1{,}02*51{,}00$, $102{,}01=1{,}01*101{,}00$, gdzie $N=a*b$ oznacza $N=a+b=a\cdot b$.

W przypadku trzech produktów szukamy rozwiązań równania $a+b+c=a\cdot b\cdot c$ w liczbach dodatnich $a\leqslant b\leqslant c$ będących wielokrotnościami 0,01. Rozwiązań takich jest 622. W dwóch rozwiązaniach ceny pewnych dwóch produktów są równe. Rozwiązaniami tymi są $6{,}75=0{,}75*3{,}00*3{,}00$ oraz $5{,}40=1{,}50*1{,}50*2{,}40$. Najtańsze zakupy można zrobić za $5{,}25=1{,}50*1{,}75*2{,}00$, a najdroższe za $1\,000\,300{,}02 = 0{,}01*100{,}01*1\,000\,200{,}00$. Istnieją 23 kwoty zakupów, dla których zadanie ma dokładnie 2 rozwiązania, najmniejszą jest $6{,}60=0{,}80*2{,}50*3{,}30=1{,}10*1{,}50*4{,}00$. Ponadto istnieją 3 kwoty zakupów, dla których zadanie ma dokładnie 3 rozwiązania, są to: $17{,}22=0{,}25*6{,}72*10{,}25=0{,}35*3{,}75*13{,}12=0{,}82*1{,}40*15{,}00$, $23{,}10=0{,}20*7{,}50*15{,}40 = 0{,}25*5{,}25*17{,}60=1{,}00*1{,}10*21{,}00$ oraz $35{,}91 = 0{,}21*5{,}70*30{,}00=0{,}50*2{,}16*33{,}25=0{,}76*1{,}40*33{,}75$.

I wreszcie wyjściowe równanie $a+b+c+d=a\cdot b\cdot c\cdot d$.

Ma ono 22640 istotnie różnych rozwiązań. Jednak kwota zakupów może przyjmować tylko 18960 różnych wartości, gdyż zadanie często ma więcej niż jedno rozwiązanie, co pokazuje poniższa tabela, z której odczytujemy na przykład, że istnieją 403 kwoty zakupów, przy których zadanie ma dokładnie 3 rozwiązania.

16709	1
1519	2
403	3
150	4
92	5
43	6
19	7
9	8
5	9
8	10
2	11
1	14

Zadanie ma 14 rozwiązań dla zakupów na łączną kwotę

$$\begin{aligned}22{,}05 &= 0{,}07*4{,}48*6{,}25*11{,}25 =\\ &= 0{,}10*2{,}45*7{,}50*12{,}00 =\\ &= 0{,}10*2{,}50*7{,}20*12{,}25 =\\ &= 0{,}10*3{,}75*4{,}20*14{,}00 =\\ &= 0{,}15*1{,}40*10{,}00*10{,}50 =\\ &= 0{,}15*2{,}00*4{,}90*15{,}00 =\\ &= 0{,}25*0{,}80*10{,}50*10{,}50 =\\ &= 0{,}25*1{,}50*3{,}50*16{,}80 =\\ &= 0{,}30*0{,}75*7{,}00*14{,}00 =\\ &= 0{,}30*0{,}80*6{,}25*14{,}70 =\\ &= 0{,}35*0{,}70*6{,}00*15{,}00 =\\ &= 0{,}35*1{,}20*3{,}00*17{,}50 =\\ &= 0{,}40*1{,}00*3{,}15*17{,}50 =\\ &= 0{,}70*1{,}20*1{,}40*18{,}75.\end{aligned}$$

W 747 rozwiązaniach ceny pewnych dwóch produktów są równe. Nie ma rozwiązań z trzema produktami w jednej cenie, ani rozwiązań z dwiema parami produktów w jednej cenie.

Zakupy za 9,60 można zrobić na trzy sposoby, ale za każdym razem trzeba wziąć dwa produkty o takiej samej cenie: $9{,}60=0{,}60*1{,}00*4{,}00*4{,}00=0{,}80*0{,}80*3{,}00*5{,}00 = 1{,}00*1{,}00*1{,}60*6{,}00$.

Z kolei przy zakupach za 31,50 w trzech z sześciu przypadków towary mają różne ceny: $31{,}50=0{,}05*3{,}20*12{,}50*15{,}75=0{,}10*1{,}40*15{,}00*15{,}00=0{,}20*1{,}05*6{,}25*24{,}00=0{,}35*0{,}40*12{,}00*18{,}75=0{,}50*1{,}50*1{,}50*28{,}00=0{,}75*0{,}75*2{,}00*28{,}00$.

Najtańsze zakupy można zrobić za $6{,}44=1{,}25*1{,}60*1{,}75*1{,}84$, podczas gdy zakup 5 produktów to wydatek co najmniej $7{,}59=1{,}25*1{,}25*1{,}60*1{,}65*1{,}84$.

Jedno z rozwiązań może posłużyć do sformułowania następującej wersji zadania:

Bill Gates wybrał z obficie zaopatrzonych półek sklepu cztery produkty i niemal natychmiast usłyszał głos kasjera.

— Płaci pan 10 000 040 000.03.

— Co? Za to? — zapytał,

— 10 *miliardów* 40 *tysięcy dolarów i* 3 *centy za zakupione towary. Po prostu odnotowałem ceny poszczególnych towarów, pomnożyłem i wyszło* 10 000 040 000,03 *— wyjaśnił kasjer.*

— Panie, toż to trzeba dodać, a nie pomnożyć!

— Istotnie, przepraszam — palce kasjera znów zastukały w klawisze podręcznego komputerka — płaci pan 10 000 040 000,03.

— To są kpiny! — oburzył się Bill.

— Ależ skąd, proszę sprawdzić.

I TO JUŻ KONIEC...

To już ostatni numer Gammalimatiasu.
Wszystkim Czytelnikom, którzy wytrwali tak długo, składam serdeczne podziękowania.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl