O niedefiniowalności

Andrzej GRZEGORCZYK

Anegdota ta zachowała się w pismach pisarza greckiego Diogenesa Laertiosa, które zawierają szereg anegdot historycznych oraz ważne przekazy poglądów wcześniejszych greckich filozofów.

Najpierw wstęp anegdotyczno-historyczny. Już starożytni Grecy wiedzieli, że aby dowieść niedefiniowalności jakiegoś pojęcia za pomocą pewnej wybranej aparatury pojęciowej, trzeba wskazać przedmiot, który spełnia warunki definicji, a najwyraźniej nie jest tym, co chcieliśmy zdefiniować. Tak więc, gdy jeden mądry Grek (chyba Platon) powiedział, że człowieka można zdefiniować jako *dwunóg bezpióry*, to drugi mądry Grek przyprowadził mu oskubanego koguta i pokazał, że zgodnie z definicją tego pierwszego Greka, to też jest człowiek. Wszyscy wówczas uznali, że definicja Platona jest zła, bo przecież człowiek i kogut to dwa bardzo różne przedmioty, jeśli więc oba spełniają tę formułę, którą miał spełniać tylko człowiek, to formuła ta nie może służyć za definicję pojęcia *człowiek.*

Współczesna metodologia nauk dedukcyjnych ten sposób postępowania doskonali i uogólnia. Można uważać, że uogólnienie zostało spowodowane w znacznym stopniu tym, że mamy obecnie dużo papieru i piszemy na nim dużo różnych formuł. Wobec tego potrafimy sobie też wyobrazić, że różnego rodzaju formuł jest nieskończenie wiele i tworzą logiczne systemy. Możemy na ich temat snuć rozważania, tak jak starożytni Grecy na temat figur geometrycznych, które znali z rysunku i budownictwa.

Mówimy więc dziś ogólnie następująco.

Jeśli X jest zbiorem zdań zapisanych za pomocą pojęć A, B, C, D i istnieją przedmioty: A, B, C, D_1 *i* D_2, *takie że:*

a) przedmioty A, B, C, D_1 *spełniają zdania zbioru X (przy rozumieniu pojęć A, B, C, D jako nazw dla przedmiotów* A, B, C, D_1*) oraz*

b) przedmioty A, B, C, D_2 *również spełniają zdania zbioru X (przy rozumieniu pojęć A, B, C, D jako nazw dla przedmiotów* A, B, C, D_2*) i przy tym*

c) przedmioty D_1 *i* D_2 *są różne:* $\mathrm{D}_1 \neq \mathrm{D}_2$,

wówczas pojęcie D nie jest definiowalne za pomocą pojęć A, B, C w oparciu o zdania zbioru X.

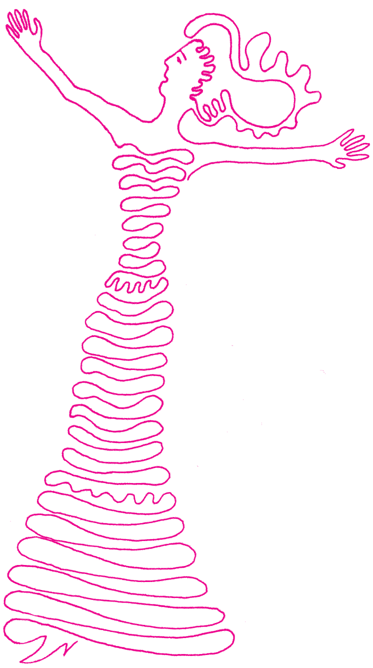
Do wyrażenia tej prawdy lubimy dziś używać słowa *model.* Mówimy wówczas, że:

Twierdzenie 1. Jeśli istnieją dwa modele $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}_1 \rangle$ i $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}_2 \rangle$ dla zdań zbioru X, takie że $\mathrm{D}_1 \neq \mathrm{D}_2$, to pojęcie D nie jest definiowalne za pomocą pojęć A, B, C w oparciu o zdania zbioru X.

Dowód tej zależności uważa się dziś w logice za trywialny. Gdyby bowiem istniała definicja pojęcia D, logicznie wynikająca ze zbioru zdań X, to znaczy, że istniałaby formuła definiująca. Na przykład gdyby D było relacją dwuargumentową, to byłaby to formuła w postaci równoważności:

(1) $$D(x,y) \equiv \ldots A, B, C, \ldots x, y, \ldots,$$

w której po prawej stronie (w tzw. definiensie) występowałyby tylko pojęcia A, B, C.



Otóż w takiej sytuacji moglibyśmy dowieść, że $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2$. W takiej bowiem sytuacji zgodnie z punktami a) i b) musiałyby być prawdziwe zdania o postaci dającej się schematycznie zapisać następująco:

(2) $$D_1(x,y) \equiv \ldots A, B, C, \ldots x, y, \ldots$$

oraz

(3) $$D_2(x,y) \equiv \ldots A, B, C, \ldots x, y, \ldots \ .$$

Ze zdań (2) i (3) na mocy przechodniości spójnika równoważności logicznej wynika, że $D_1(x,y) \equiv D_2(x,y)$, czyli że $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_2$.

Twierdzenie 1 wypowiada się też czasem z użyciem pojęcia *interpretacja*, mówiąc: *jeśli istnieją dwie interpretacje teorii X, takie że pojęcia A, B, C przy obu interpretacjach interpretują się tak samo, a pojęcie D interpretowane jest w każdej z nich inaczej, wówczas pojęcie D nie jest definiowalne za pomocą pojęć A, B, C na gruncie teorii X.*

Przykład prosty, ale pouczający.

Twierdzenie 2. W elementarnej arytmetyce liczb naturalnych relacja mniejszości $<$ nie jest definiowalna przez pojęcia *zero* i *następnik*.

Dowód. Opisujemy najpierw zbiór zdań, na których się opieramy. Opieramy się mianowicie na zdaniach, które mogą służyć za aksjomaty dla pojęć *zero, następnik, mniejszość.* Są to zdania:

Dowód zupełności tej aksjomatyki przytoczony jest np. w dawno wydanej mojej książce: *Zarys arytmetyki teoretycznej*, PWN Warszawa 1971 (Biblioteka Matematyczna tom 39) s. 226 i nast. Czytelnik zainteresowany zamieszczonym tam dowodem może spróbować dowieść, że teoria A_1–A_9 jest zupełną teorią pojęć: *zero, następnik* i *mniejszość.*

A_0) $x \neq 0 \Longrightarrow \exists y\ (x = S(y))$

A_1) $0 \neq S(x)$

A_2) $S(x) = S(y) \Longrightarrow x = y$

A_{3k}) $x \neq \underbrace{S(\ldots S}_{k \text{ znaków następnika, } k>0}(x)\ldots)$

(nieskończony ciąg aksjomatów)

A_4) $x < y \Longrightarrow \neg(y < x)$

A_5) $(x < y \wedge y < z) \Longrightarrow x < z$

A_6) $x < y \vee y < x \vee x = y$

A_7) $x < S(y) \equiv (x < y \vee x = y)$

A_8) $0 < S(x)$

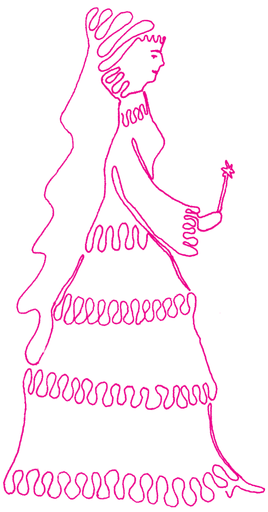
A_9) $x < y \equiv S(x) < S(y)$.

Aksjomaty A_0–A_{3k} dają zupełną aksjomatykę dla pojęć *zero* i *następnik*.

Jeśli mamy wykazać, że z aksjomatów A_0–A_9 nie można wyprowadzić zdania, które mogłoby być definicją równoważnościową relacji mniejszości, to musimy, zgodnie z opisaną wyżej metodą dowodzenia niedefiniowalności, znaleźć taki model dla zera i następnika, który dopuszczałby dwie różne interpretacje dla mniejszości, tak aby w obu przypadkach wszystkie aksjomaty A_0–A_9 były spełnione.

Pierwsza ważna refleksja to zauważenie, że modelem tym nie mogą być prawdziwe liczby naturalne z prawdziwym zerem i następnikiem. W nim bowiem jest tylko jedna taka relacja, która spełnia aksjomaty A_0–A_9. Jest nią prawdziwa relacja mniejszości wśród liczb naturalnych. Z tego, że jest jedna jedyna, wcale nie wynika, że musi być definiowalna. Musimy więc szukać modelu, który nie jest izomorficzny ze zbiorem liczb naturalnych. Takie modele są zwane modelami niestandardowymi. Warto się przyjrzeć, jaka jest struktura modeli niestandardowych dla arytmetyki liczb naturalnych.

Modele takie łatwo sobie wyobrazić. Składają się one z części początkowej, która jest standardowa, a następnie z części, która jest izomorficzna ze zbiorem wszystkich liczb całkowitych, ewentualnie powtórzonej jeszcze jakąś ilość razy. Dla rozważań o następniku i mniejszości wystarczą dwie takie części. Na osi liczb rzeczywistych model taki łatwo narysować i oznaczyć liczbami wymiernymi. Zajmiemy się jednym z nich.



Model opisywany składa się z trzech zbiorów liczb wymiernych: N, X, Y. Mogą być one określone np. następująco:

(4) $N = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}, \quad X = \left\{1 + \frac{1}{n+1}\right\} \cup \left\{2 + \frac{n}{n+1}\right\}, \quad Y = \left\{3 + \frac{1}{n+1}\right\} \cup \left\{4 + \frac{n}{n+1}\right\}.$

Przyjmujemy, że n przebiega liczby naturalne (całkowite nieujemne).

Pod względem relacji mniejszości zbiór ułamków N jest izomorficzny ze zbiorem liczb naturalnych. Ma element najmniejszy 0, a wszystkie inne mają poprzedni i następny. Ciąg zaczynający się od 0 wyczerpuje zbiór N. Natomiast zbiory X i Y są izomorficzne ze zbiorem liczb całkowitych (nie mają elementu najmniejszego, ani największego).

Model, który wykazuje niedefiniowalność *mniejszości* przez *następnik* i *zero*, określamy, ustalając zbiór wszystkich elementów modelu (nazwijmy go M) oraz ustalając interpretacje pojęć pierwotnych teorii:

1) Zbiór M określamy jako sumę zbiorów wyżej opisanych: $M = N \cup X \cup Y$.
2) Zero interpretujemy jako liczbę wymierną 0.
3) Następnikiem liczby wymiernej $r \in M$ nazywamy liczbę zbioru M, która jest najmniejszą (w sensie relacji mniejszości wśród liczb wymiernych) spośród większych od r i należących do zbioru M. Liczbę tę oznaczmy przez $s(r)$.
4) Natomiast relację mniejszości będziemy interpretować dwojako. Przyjmijmy, że $<$ oznacza prawdziwą mniejszość wśród liczb wymiernych tworzących zbiór M. Dwie interpretacje pojęcia mniejszości z teorii A_0–A_9 oznaczmy przez $<_1$ oraz $<_2$. Definiujemy je następująco:

4a) $r <_1 s \equiv r < s$ dla wszelkich $r, s \in M$.

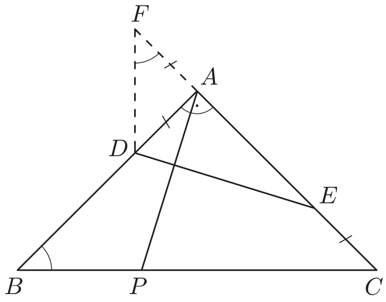
Na temat relacji $<_2$ umawiamy się tak:

4b) jeśli $r \notin Y$, to $r <_2 s \equiv r < s$,

4c) jeśli $r \in Y$, to

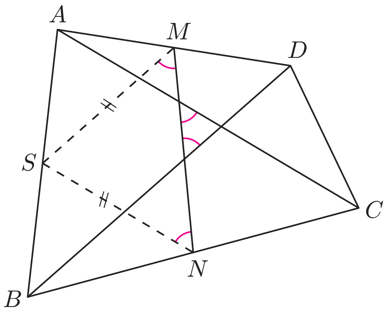
$r <_2 s \equiv ((r < s \wedge s \in Y) \vee s \in X)$.

Rozwiązanie zadania M 1058.
Niech F będzie takim punktem półprostej $CA^{\rightarrow}$, leżącym poza odcinkiem AC, że $AF = AD$.



Wówczas $\sphericalangle DFE = 45^\circ = \sphericalangle PBA$. Ponadto $\sphericalangle FED = \sphericalangle BAP$ oraz $EF = AC = AB$. Z równości tych wynika, że trójkąty DEF i PAB są przystające. Zatem $AP = DE$.

Rozwiązanie zadania M 1059.
Niech S będzie środkiem boku AB.



Wówczas $MS = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC = NS$. Z równości tych wynika, że prosta MN tworzy równe kąty z prostymi MS i NS. To w połączeniu z zależnościami $MS \parallel BD$ i $NS \parallel AC$ – prawdziwymi na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa – daje tezę.

Z określenia 4a) widać, że $<_1$ jest mniejszością wśród liczb wymiernych. Natomiast z określeń 4b) i 4c) wynika, że mniejszość $<_2$ pokrywa się z mniejszością wśród liczb wymiernych tylko wtedy, gdy r i s razem należą do $N \cup X$ lub razem należą do $N \cup Y$. Natomiast gdy $r \in X$ i $s \in Y$, to wówczas zgodnie z (4) i 4b) nie zachodzi $s <_1 r$, ale zgodnie z 4c) zachodzi $s <_2 r$.

Związek między relacjami $<_1$ i $<_2$ można opisać też tak: Wewnątrz zbiorów N, X, Y, $N \cup X$, $N \cup Y$ relacje te pokrywają się ze sobą i z relacją mniejszości wśród liczb wymiernych. Natomiast gdy $s \in Y$, a $r \in X$, to wówczas zachodzi $s <_2 r$ zgodnie z 4c), a nie zachodzi $s <_1 r$ zgodnie z 4a), ponieważ wszystkie liczby wymierne zbioru Y są większe od liczb zbioru X w sensie relacji $<$ zgodnie z określeniami (4) tych zbiorów.

Można powiedzieć, że przechodząc od relacji $<_1$ do relacji $<_2$, cały zbiór Y przesuwamy przed zbiór X między zbiór N i zbiór X, nie zmieniając pozostałych związków mniejszości między elementami zbioru M. Można to schematycznie narysować tak: $N <_1 X <_1 Y$, $N <_2 Y <_2 X$. W szczególności mamy więc, że: $2 <_1 4$ i $4 <_2 2$. Relacje $<_1$ i $<_2$ są więc różne. Natomiast łatwo jest sprawdzić, że obie spełniają wszystkie aksjomaty A_0–A_9. Zgodnie z Twierdzeniem 1 dowodzi to, że z aksjomatów tych nie może wynikać żadna formuła elementarna (czyli nie odwołująca się do pojęcia zbioru), która mogłaby być definicją mniejszości sformułowaną za pomocą zera i następnika.

Ze spełnianiem aksjomatów następnika w modelu niestandardowym można się pogodzić, jeśli sobie uświadomimy różnicę między częścią standardową N tego modelu oraz pozostałą częścią $X \cup Y$, którą możemy nazwać niestandardowym ogonem tego modelu. W części standardowej N wszystko jest w dobrym porządku. Natomiast ogon przypomina bardzo dalekie od zera kawałki części standardowej N. Każdy element zbioru N możemy wyraźnie opisać za pomocą funkcji interpretującej następnik. Na zbiór N składają się elementy ciągu

$$\{0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), s(s(s(s(0)))),\ \text{itd.}\}$$

Tylko gdy mówimy o elementach generowanych przez 0 i funkcję s, to mamy pewność, że mówimy tylko o elementach standardowych modelu. Natomiast dla każdej właściwości, którą posiada nieskończenie wiele elementów ciągu N, a więc dla właściwości, która nie może być opisana przez wskazanie wszystkich elementów ją posiadających, istnieją również w tym ogonie dalsze elementy zbioru M, nieodróżnialne za pomocą żadnej formuły od tych elementów, które należą do N i posiadają tę właściwość.

Istnienie modeli niestandardowych dla arytmetyki stanowi fakt dla matematyków poniekąd przykry. Pokazuje on, że teoretyczne narzędzia, którymi dysponujemy w badaniu matematycznym, czyli budowanie teorii i dowodzenie twierdzeń, nie gwarantują, że będziemy dobrze charakteryzować to i tylko to, co chcemy. Zawsze ktoś pokaże, że to, co twierdzimy, odnosi się też do jakiejś dziwnej rzeczywistości, której wcale opisywać nie chcieliśmy. Ale dla tych, co są zainteresowani też naszym ludzkim poznawaniem świata, spostrzeżenie to jest interesujące, chociaż pokazuje raczej pewną ograniczoność naszej wiedzy. Jeśli dodamy pojęcie zbioru, wówczas za pomocą samego następnika i pojęcia zbioru możemy zdefiniować wszystkie funkcje czy relacje arytmetyczne, które zechcemy. Ale wówczas logicy potrafią wskazać, że samo pojęcie zbioru ma wiele interpretacji, których może nie chcieliśmy.

Na zakończenie dwa zadania, które wykonać można również, zajmując się niestandardowymi modelami arytmetyki:

1. Dowieść, że dodawanie nie jest definiowalne przez zero, następnik i mniejszość. (Dodając np. do aksjomatów powyższych jeszcze dwa indukcyjne warunki dla dodawania: $x + 0 = x$, oraz $x + S(y) = S(x + y)$.)

Nie jest to zupełna aksjomatyka dodawania. Zupełna aksjomatyka wraz z dowodem zupełności opisana jest również w cytowanej książce s. 239 i nast. Dla zupełnej dowód niedefiniowalności będzie trudniejszy.

2. Dowieść, że mnożenie nie jest definiowalne przez dodawanie. Fakt ten jest znany jako konsekwencja tego, że arytmetyka dodawania jest rozstrzygalna, a dodawania i mnożenia nie jest rozstrzygalna, ale pokazanie niedefiniowalności na modelach mogłoby być interesujące.