Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2004

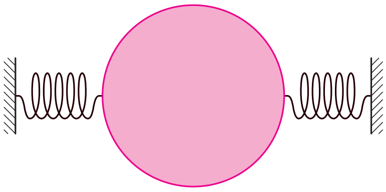
UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!

Zadania z fizyki nr 376, 377

Redaguje Jerzy B. BROJAN

376. Do jednorodnej płytki o kształcie koła doczepiono dwie sprężynki w przeciwległych punktach obwodu, napięto sprężynki pewną siłą, a drugie ich końce zamocowano, tak że w położeniu równowagi długość każdej sprężynki jest równa promieniowi koła (rysunek).



Jeśli w ruchu postępowym płytki wzdłuż osi pionowej okres małych drgań jest równy T, to ile wynosi okres małych drgań dla ruchu obrotowego:

a) wokół osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek koła,

b) wokół pionowej osi przechodzącej przez środek koła?

377. Obwód składa się z n węzłów połączonych każdy z każdym opornikami o oporze r.

a) Obliczyć opór zastępczy między dwoma węzłami sieci ($n \geqslant 2$).

b) Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między tymi dwoma węzłami a dowolnym innym ($n \geqslant 3$).

c) Zwarto dwa węzły tego obwodu. Obliczyć opór zastępczy między dwoma innymi węzłami ($n \geqslant 4$).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2003

Przypominamy treść zadań:

368. Dyzio strasznie dzisiaj dokazywał, gdy wyszedł na spacer na zewnątrz stacji kosmicznej krążącej wokół Ziemi. Zamiast pilnować swojej piłki, rzucił ją gdzieś i zanim ktokolwiek się zorientował, już jej nie było. „Dyziu, nie zaśmiecaj Kosmosu,” – upomniał go tata – „każdy swobodnie lecący przedmiot może być przyczyną katastrofy innych stacji!”. „Jak to dobrze, że przynajmniej nam nic z tego powodu nie grozi!” – odpowiedział niegrzeczny chłopiec. „Żałuję tylko, że mi zginęła, będę się rozglądał, czy kiedyś nie przeleci obok, może ją złapię”.

Czy piłka może w przyszłości stanowić zagrożenie dla tej stacji? Czy Dyzio ma realną szansę ją odzyskać? Zakładamy, że stacja i piłka poruszają się tylko pod wpływem grawitacji ziemskiej, a Ziemia przyciąga tak, jak punkt materialny. Rozważyć przypadki stacji poruszającej się po orbicie kołowej i eliptycznej.

369. Silnik rakietowy spala łącznie 100 g wodoru i tlenu na sekundę, a temperatura w komorze spalania wynosi 1000 K. Obliczyć przybliżoną wartość siły ciągu silnika.

368. Ruch stacji i piłki zachodzi po krzywej zamkniętej (elipsie), a niewielka zmiana warunków początkowych wynikająca z rzutu wykonanego przez Dyzia oznacza niewielką zmianę orbity piłki w porównaniu z orbitą stacji. Orbity te mają jeden lub dwa wspólne punkty, przy czym w przestrzeni trójwymiarowej drugi przypadek jest mało prawdopodobny (wymaga to odpowiedniego dobrania kierunku rzutu piłką). Jeśli spotkanie nastąpi w punkcie początkowym, to względna prędkość obu ciał będzie taka sama, jak na początku – a więc równa prędkości rzutu (i całkowicie niegroźna dla bezpieczeństwa lotu). W drugim przypadku zasada zachowania energii mówi nam, że

$$(\vec{v}_1 + \vec{w}_1)^2 - (\vec{v}_0 + \vec{w}_0)^2 = v_1^2 - v_0^2,$$

gdzie w jest prędkością względną, a indeksy 0 i 1 odnoszą się do dwóch punktów przecięcia orbit. Ponieważ w jest znacznie mniejsze od v, więc w przybliżeniu $\vec{v}_0 \cdot \vec{w}_0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1$. Zatem składowa prędkości względnej wzdłuż wektora prędkości orbitalnej stacji może być w drugim punkcie przecięcia kilkakrotnie większa albo mniejsza od jej wartości początkowej, w stosunku odwrotnym do tego, jak zmieni się sama prędkość orbitalna. Podobny wniosek wynika z zasady zachowania momentu pędu w odniesieniu do prostopadłych do wektora wodzącego $\vec{r}$ składowych prędkości względnej. Ostatecznie nic szczególnego nie grozi stacji ze strony piłki, chyba że orbita stacji jest **bardzo** wydłużona (np. jeśli prędkość orbitalna zmienia się o czynnik rzędu tysiąca...).

Nie rozpatrujemy szczegółowo kwestii, czy stacja i piłka miną punkt przecięcia ich orbit jednocześnie. Na ogół okresy obiegu orbit będą niewspółmierne, czyli spotkanie wymaga bardzo szczególnego zbiegu okoliczności. Wygląda na to, że Dyzio będzie potrzebował wiele szczęścia, żeby schwytać piłkę!

369. W temperaturze 1000 K średnia kwadratowa prędkość cząsteczek wody wynosi

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 1180 \text{ m/s}.$$

Prędkość wyrzucanych gazów może się zbliżyć do tej wartości – jeśli przyjmiemy, że są równe, to z drugiej zasady dynamiki w postaci

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v$$

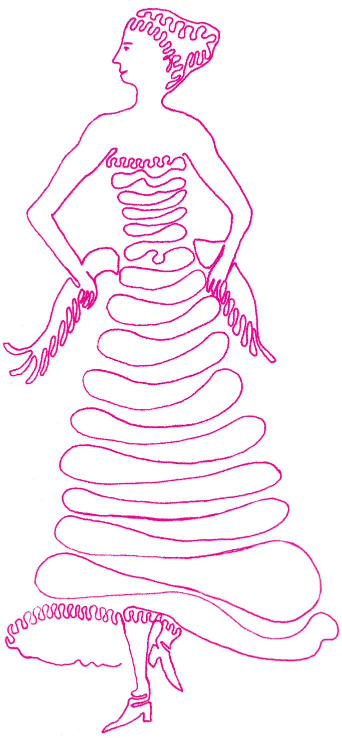
obliczymy siłę ciągu $F = 118$ N. Dla realnego silnika wynik ten należy uważać jedynie za górne ograniczenie.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2004

UWAGA!

ZMIANA ADRESU DO KORESPONDENCJI!



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **364** ($WT = 1{,}00$) i **365** ($WT = 2{,}20$) z numeru 10/2003

Marian Łupieżowiec	– Gliwice	21,09
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	15,32
Tomasz Wietecha	– Tarnów	15,03

Zadania z matematyki nr 479, 480

Redaguje Marcin E. KUCZMA

479. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla $x, y \in \mathbb{R}$ równanie
$$f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = xf(x) + y.$$

480. Czy istnieje dodatnia liczba całkowita a mająca tę własność, że dla każdej trójki dodatnich liczb całkowitych k, ℓ, m iloczyn
$$a^k(a+1)^\ell(a+2)^m$$
da się przedstawić jako suma dwóch kwadratów liczb całkowitych?

Zadanie 480 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kęt.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2003

Przypominamy treść zadań:

471. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania $(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1) = 210\,x^5$.

472. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ taki, że szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny, a szereg $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots$ jest rozbieżny?

471. Niech x będzie jednym z szukanych pierwiastków; oczywiście $x \neq 0$. Wymnażając czynniki lewej strony oraz dzieląc równanie stronami przez x^5 mamy
$$x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2 + 2x^{-1} + 2x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} = 210.$$
Przyjmijmy $x + x^{-1} = t$ oraz skorzystajmy z tego, że sumy postaci $x^k + x^{-k}$ wyrażają się wielomianowo przez t:
$$x^2 + x^{-2} = t^2 - 2, \qquad x^3 + x^{-3} = t^3 - 3t,$$
$$x^4 + x^{-4} = t^4 - 4t^2 + 2, \quad x^5 + x^{-5} = t^5 - 5t^3 + 5t.$$
Po podstawieniu tych wyrażeń do naszego równania otrzymujemy
$$t^5 + t^4 - 4t^3 - 2t^2 + 4t = 210,$$
czyli
$$(t-3)(t^4 + 4t^3 + 8t^2 + 22t + 70) = 0.$$
Wielomian w drugim nawiasie daje się zapisać jako
$$\Big(t^2 + 2t\Big)^2 + 4\Big(t + \frac{11}{4}\Big)^2 + \frac{159}{4},$$
przyjmuje więc tylko wartości dodatnie. Zatem $t = 3$ i mamy odpowiedź: jedynymi pierwiastkami rzeczywistymi rozważanego równania (stopnia 10) są dwa pierwiastki równania kwadratowego $x + x^{-1} = 3$, czyli liczby $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.

472. Istnieją szeregi $\sum a_n$ mające podaną własność. Przykłady nietrudno wskazać, korzystając z takiego faktu:

Jeżeli (x_n) jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, zbieżnym do zera, to szereg
$$(*) \qquad x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 + x_8 - 2x_9 + \ldots$$
jest zbieżny.

Uzasadnienie: oznaczając n-tą sumę częściową szeregu $(*)$ przez S_n wykazujemy, że ciąg (S_{3n}) jest rosnący i ograniczony z góry:
$$S_{3n} - S_{3n-3} = (x_{3n-2} - x_{3n}) + (x_{3n-1} - x_{3n}) > 0;$$
$$S_{3n} = x_1 + x_2 + \sum_{i=1}^{n}\Big((x_{3i+1} - x_{3i}) + (x_{3i+2} - x_{3i})\Big) - x_{3n+1} - x_{3n+2} < x_1 + x_2\,;$$
stąd zbieżność ciągu (S_{3n}), więc i ciągu (S_n), skoro $x_n \to 0$. (Natychmiastowe uzasadnienie przytoczonego „faktu” możemy także otrzymać, powołując się na kryterium Dirichleta zbieżności szeregów).

A zatem zbieżny jest, na przykład, każdy z szeregów $\sum a_n$, $\sum b_n$, gdzie
$$a_n = \begin{cases} \sqrt[3]{1/n} & \text{dla } n = 3k \pm 1, \\ -2\sqrt[3]{1/n} & \text{dla } n = 3k, \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1/n & \text{dla } n = 3k \pm 1, \\ -2/n & \text{dla } n = 3k. \end{cases}$$
Przy tym
$$b_n = \begin{cases} a_n^3 & \text{dla } n = 3k \pm 1, \\ a_n^3 + \frac{6}{n} & \text{dla } n = 3k. \end{cases}$$
Ze zbieżności szeregu $\sum b_n$ oraz rozbieżności szeregu $\sum 1/k$ wynika więc rozbieżność szeregu $\sum a_n^3$ i mamy przykład szeregu $\sum a_n$, o jaki chodziło.