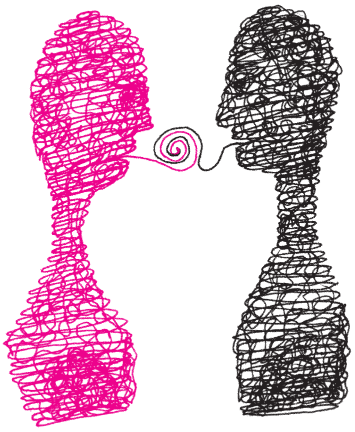
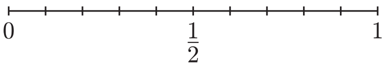
Jak się mierzy objętość nitką?

Piotr HAJŁASZ, Paweł STRZELECKI

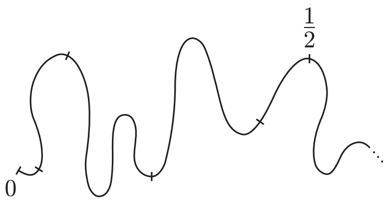


Czy przyszło Wam kiedyś do głowy, drodzy Czytelnicy, mierzyć nitką objętość? Albo pole? Nie chodzi nam tu o czyjeś mgliste domysły w rodzaju *Ta paczka musi być olbrzymia, skoro Ciocia Hela zmarnowała trzy kłębki sznurka, żeby ją obwiązać.* Nie zadowala nas również odpowiedź *Oczywiście – mogę wymierzyć nitką mój pokój; jest to prostokąt o bokach* 3 *i* 4 m, *więc jego pole jest równe* 12 m^2. Chodzi nam o swoistą czarną skrzynkę, która pozwoliłaby określać objętość *wszelkich* rozsądnych przedmiotów poprzez odczytywanie długości pewnych odcinków.

Oto zarys pomysłu: spróbujmy przez chwilę pomarzyć i wyobraźmy sobie idealną, doskonale elastyczną i nieskończenie cienką nitkę, na której naniesiono podziałkę do mierzenia długości. Wyobraźmy sobie następnie, że owa nitka zostaje bardzo gęsto upakowana we wnętrzu sześcianu – jakiś Dzielny Krawczyk, skądinąd znacznie dzielniejszy niż bohater znanej baśni braci Grimm, rozciąga ją do woli (wraz z podziałką!) i, wywijając igłą, układa przemyślnie w coraz dziwniejsze esy-floresy, w taki sposób, że koniec końców powykręcana nitka przechodzi przez każdą drobinę wnętrza sześcianu, przez każdy milimetr i nanometr sześcienny, o którym Czytelnik w ogóle zdoła pomyśleć. Objętość mierzymy w następujący sposób: jeśli pewna część sześcianu jest wypełniona, powiedzmy, czerwonym barwnikiem, to trzeba odczytać z podziałki, jaka była łączna długość (uwaga: wyjściowa długość, *przed* rozciąganiem!) zabarwionych na czerwono kawałków nitki – i ta łączna długość jest równa objętości czerwonego barwnika. W ogóle nie jest ważne, gdzie się barwnik znajduje, ile go jest i jaki kształt ma wypełniona przezeń część sześcianu. Brzmi to zaskakująco, niemal magicznie, a mimo to jest możliwe, w tym samym abstrakcyjnym i całkowicie niefizycznym sensie, w jakim możliwych jest tak wiele cudownych rzeczy w matematyce.



Rys. 1

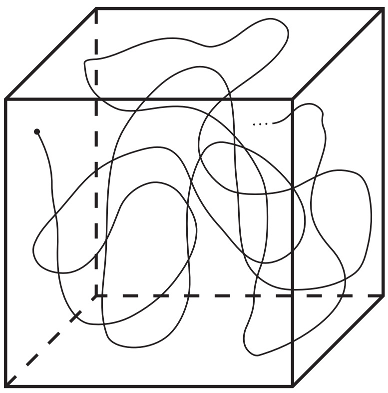


Rys. 2

Oto nieco dokładniejszy, rysunkowy opis sposobu, w jaki mierzy się objętość dowolnych podzbiorów sześcianu za pomocą nitki.

Na rysunku 1 przedstawiona jest elastyczna nitka z podziałką. Nitka to po prostu odcinek długości 1.

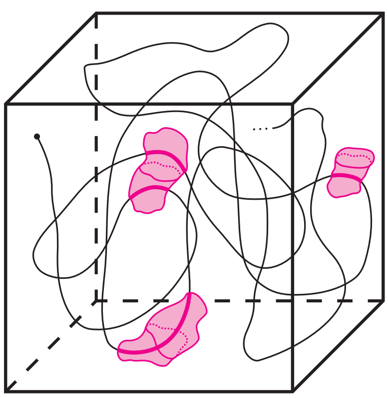
Rozciągamy nitkę (rys. 2); podziałka rozciąga się wtedy nierównomiernie. W istocie jeden z końców nitki rozciągamy tak bardzo, że nitka staje się nieskończenie długa.



Rys. 3

Rozciągniętą nitkę w odpowiednio przemyślany sposób gęsto upychamy w sześcianie (rys. 3). Teraz wyobraźmy sobie, że chcemy zmierzyć objętość pewnej – skądinąd całkowicie dowolnej i być może bardzo nieregularnej części sześcianu.

Nie ruszając nici wypełniamy tę część, której objętość chcemy zmierzyć, barwnikiem (rys. 4). Fragmenty nitki znajdujące się w obszarach wypełnionych barwnikiem zabarwią się.



Rys. 4

Następnie wyciągamy z sześcianu pobrudzoną barwnikiem nić i obkurczamy do pierwotnego wymiaru. Zabarwione części i rozciągnięta podziałka też się obkurczą. Teraz, już po obkurczeniu, mierzymy łączną długość zabarwionej części nici. Wynik jest równy objętości obszaru wypełnionego barwnikiem – a ułożenie nici było tak przemyślne, że zupełnie nie ma znaczenia, jaki kształt miał ów obszar!

Zanim Czytelnicy zaczną twierdzić, że zupełnie postradaliśmy zmysły, porzućmy przenośnie i potoczne opisy, by sformułować czysto matematyczne pytanie, co pozwoli uniknąć nieporozumień i błędnych interpretacji. Pytamy mianowicie, czy istnieje ciągłe i różnowartościowe odwzorowanie $\varphi\colon [0,1) \to Q$, gdzie Q oznacza wnętrze sześcianu o krawędzi 1 w przestrzeni trójwymiarowej, o następującej własności: dla dowolnego otwartego podzbioru $A \subset Q$ długość $|\varphi^{-1}(A)|$

przeciwobrazu $\varphi^{-1}(A)$ jest równa objętości A. Dwa akapity wyżej zbiór A był opisany jako część sześcianu wypełniona czerwonym barwnikiem. Odwzorowanie φ to nasza idealna nić; wymóg, by φ było różnowartościowe, jest naturalny: wszak prawdziwa nitka nie ma samoprzecięć. Wreszcie, „wyjściowa długość zabarwionych kawałków nitki” to właśnie liczba $|\varphi^{-1}(A)|$.

Odpowiedź na tak postawione pytanie jest, jak się okazuje, twierdząca.

Jeśli φ jest przekształceniem, o którym mowa w twierdzeniu o nitce, to zbiór $\varphi^{-1}(A)$ jest sumą nieskończenie wielu rozłącznych odcinków otwartych; liczba $|\varphi^{-1}(A)|$ jest sumą długości wszystkich tych odcinków, a jej wartość nie zależy od kolejności składników.

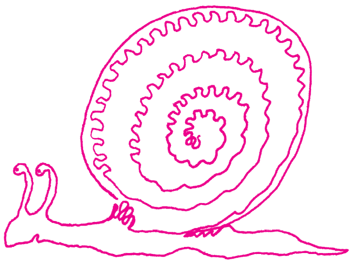
Uwaga dla dorosłych: jest jasne, że teza twierdzenia zachodzi nie tylko dla otwartych A, ale dla wszystkich borelowskich $A \subset Q$; *objętość* trzeba tylko zastąpić *miarą Lebesgue'a*.

Twierdzenie o nitce. Istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie

$$\varphi : [0, 1) \to (0, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3,$$

takie że liczba $|\varphi^{-1}(A)|$ jest równa objętości zbioru A dla każdego otwartego $A \subset (0, 1)^3$.

Wymiar 3 można zastąpić dowolnym innym wymiarem $n \geqslant 2$; teza twierdzenia pozostanie prawdziwa (trzeba tylko oczywiście zastąpić zwykłą objętość objętością n-wymiarową).



Twierdzenie o nitce jest dość prostym i bezpośrednim wnioskiem ze starego, pięknego twierdzenia, które w 1941 roku udowodnili John von Neumann, John Oxtoby i Stanisław Ulam. Dla Czytelników, którzy mają za sobą podstawowy wykład teorii miary i całki Lebesgue'a, przytaczamy niżej drobnym drukiem sformułowanie tego wyniku. Pozostali Czytelnicy muszą, niestety, zadowolić się następującą niezbyt precyzyjną interpretacją fizyczną: jeśli sześcian jednostkowy Q jest wypełniony plastyczną substancją o całkowitej masie 1, w taki sposób, że masa substancji znajdującej się w dowolnym otwartym podzbiorze sześcianu jest dodatnia, a masa dowolnego pojedynczego punktu jest równa zeru, to można ową substancję w sposób ciągły i różnowartościowy zdeformować tak, by po deformacji gęstość substancji była stała i równa 1. O początkowej gęstości celowo nie wspominamy: cały dowcip i siła twierdzenia von Neumanna, Oxtoby'ego i Ulama polega na tym, że substancja może być rozłożona w sześcianie w tak dziwaczny i zawiły sposób, że gęstości rozkładu masy w ogóle nie można rozsądnie określić. I właśnie dlatego zachodzi twierdzenie o nitce.

Zainteresowani odnajdą dowód np. w książce C. Goffmana, T. Nishiury i D. Watermana zatytułowanej *Homeomorphisms in analysis* i wydanej przez Amerykańskie Towarzystwo Matematyczne w 1997 roku. Wersję elektroniczną można znaleźć na stronie http://www.ams.org/books.

Twierdzenie (von Neumann, Oxtoby, Ulam). Niech μ będzie miarą borelowską na n-wymiarowej kostce jednostkowej Q, taką że $\mu(Q) = 1$, $\mu(\{x\}) = 0$ dla wszystkich punktów $x \in Q$, $\mu(\partial Q) = 0$ i wreszcie $\mu(U) > 0$ dla wszystkich zbiorów otwartych $U \subset Q$. Istnieje wówczas homeomorfizm $h : Q \to Q$, taki że n-wymiarowa miara Lebesgue'a $\mathcal{L}^n(A) = \mu(h(A))$ dla każdego zbioru borelowskiego $A \subset Q$. Ponadto, $h\,|_{\partial Q} = \mathrm{id}$.

A oto idea wykorzystania powyższego twierdzenia do dowodu twierdzenia o nitce. Bierze się *jakiekolwiek* ciągłe i różnowartościowe odwzorowanie $\psi : [0, 1) \to (0, 1)^3$, które ma tę dodatkową własność, że obraz $\psi([0, 1))$ odcinka $[0, 1)$ jest gęstym podzbiorem sześcianu (np. zawiera wszystkie punkty o trzech współrzędnych wymiernych). Oczywiście przypadkowo wybrane ψ nie musi spełniać tezy twierdzenia o nitce. Można jednak bez trudu każde takie ψ poprawić, stosując twierdzenie von Neumanna, Oxtoby'ego i Ulama. Do jakiej miary? I jak poprawiać ψ – składać ψ z homeomorfizem h czy może z h^{-1}? Na te pytania zainteresowani Czytelnicy zechcą odpowiedzieć samodzielnie.

My zadowolimy się stwierdzeniem, że istnienie „nitki do pomiaru objętości” jest jeszcze jednym, jakże dobitnym, świadectwem wielkiej subtelności najbardziej podstawowych pojęć współczesnej analizy matematycznej: liczby rzeczywistej, ciągłości, miary. Pojęć, bez których nie do pomyślenia jest nie tylko owa nitka, ale i daleko praktyczniejsze i poważniejsze sprawy: teoria sprężystości, mechanika ośrodków ciągłych, przetwarzanie oraz kompresja obrazów i inne, bardzo różnorodne, zastosowania analizy matematycznej.

⋆ ⋆ ⋆

Stanisław Ulam, 1909–1984

Jeden z młodszych przedstawicieli przedwojennej Polskiej Szkoły Matematycznej; doktorat uzyskał w 1933 roku we Lwowie, pod opieką Stefana Banacha.

Z Polski wyjechał na stałe w sierpniu 1939 roku; w 1943 roku przyjął obywatelstwo amerykańskie. W USA wykładał m.in. na uniwersytetach Harvarda, Wisconsin i Południowej Kalifornii. Najpowszechniej jest jednak znana jego praca w Laboratorium Narodowym w Los Alamos, gdzie wspólnie z fizykiem Edwardem Tellerem rozwiązał kluczowe kwestie, umożliwiające budowę bomby wodorowej. Ulam jest także autorem metody Monte Carlo, szeroko wykorzystywanej w analizie numerycznej.

Wspólną pracę z Oxtobym uważał za jedno ze swych najbardziej wartościowych osiągnięć.

Kto chciałby o Ulamie wiedzieć więcej, powinien przeczytać jego *Przygody matematyka*, wydane po polsku w 1996 roku.