4/04 (76)

Γ limatias $_{n\to\infty}$

PIĄTA KOLUMNA

Instytut Badań Niepoważnych ufundował stypendium dla młodego naukowca. Poproszono Cię o wstępną selekcję kandydatów.

Kandydaci przychodzą do Ciebie w losowej kolejności na rozmowę kwalifikacyjną. Ty jesteś w stanie porównać kwalifikacje dwóch kandydatów, którzy jeden po drugim przyszli na rozmowę, jednak porównanie kwalifikacji kandydatów, z którymi rozmawiałeś w większym odstępie czasu, jest dla Ciebie niewykonalne. Przy tym żadnych dwóch kandydatów nie ma dokładnie takich samych umiejętności, zawsze któryś jest, choćby nieznacznie, lepszy. I ty to bezbłędnie wychwycisz, o ile między nimi nie będziesz rozmawiał z innym kandydatem.

Ponieważ ma to być tylko wstępna selekcja, z każdym porozmawiasz tylko raz. Zapisujesz na kartce nazwisko pierwszego kandydata. Jeśli drugi jest od niego lepszy, zapisujesz je pod nazwiskiem pierwszego, jeśli gorszy, zapisujesz jego nazwisko w drugiej kolumnie.

Tak samo postępujesz z każdym kolejnym kandydatem, zapisujesz jego nazwisko pod nazwiskiem poprzednika, jeśli jest od tego poprzednika lepszy. Jeśli zaś jest gorszy od poprzednika, zapisujesz jego nazwisko w nowej kolumnie. W ten sposób cała zebrana przez Ciebie wiedza o kandydatach odzwierciedlona jest w układzie ich nazwisk.

Jeśli na przykład kolejno wchodzili na rozmowę panowie: Aber, Baber, Czaber, Daber, Ezaber i Faber, to zapis:

Aber	Daber	Ezaber
Baber		Faber
Czaber		

oznacza, że Baber jest lepszy od Abera, a jeszcze lepszy od Babera jest Czaber. Z kolei Daber jest gorszy od Czabera, ale lepszy od Ezabera. Faber wypadł natomiast lepiej niż Ezaber.

W miarę jak przychodzą kolejni kandydaci, zaczyna być trochę nudnawo, więc część swojej uwagi kierujesz na następujące zagadnienie:

Jaka jest wartość oczekiwana liczby kandydatów zapisanych w pierwszej kolumnie?

Nietrudno obliczyć, że w przypadku n kandydatów, wartość oczekiwana liczby nazwisk zapisanych w pierwszej kolumnie jest równa

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}\,,$$

co dla dużych n jest w przybliżeniu równe

$$\mathrm{e}-1\approx 1{,}718281828.$$

A jaka jest wartość oczekiwana liczby nazwisk zapisanych w drugiej kolumnie?

To już trochę trudniejsze pytanie. Okazuje się jednak, że w przypadku n kandydatów jest ona równa

$$\frac{1}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{11}{4!}+\ldots+\frac{2^n-n-1}{n!}\,,$$

co przy n dążącym do nieskończoności dąży do

$$\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}\approx 1{,}952492442.$$

Widzimy więc, że w drugiej kolumnie średnio pojawi się więcej nazwisk niż w pierwszej, przy czym zjawisko to można będzie zaobserwować już przy 5 kandydatach!

Dlaczego średnia długość drugiej kolumny jest większa niż pierwszej? Po prostu pierwszy kandydat w pierwszej kolumnie jest zupełnie przeciętny (czy raczej: doskonale losowo wybrany), podczas gdy drugiej zapewne nie otwiera supergeniusz, bo w końcu okazał się słabszy od swego poprzednika. Skoro drugą kolumnę rozpoczyna kandydat statystycznie słabszy, nic dziwnego, że ma szansę się w niej znaleźć więcej nazwisk.

A jaka jest oczekiwana średnia długość trzeciej kolumny?

Już dla $n=9$ jest ona dłuższa niż druga kolumna, jej średnia długość przy n dążącym do nieskończoności wynosi

$$\mathrm{e}^3-3\mathrm{e}^2+\frac{3}{2}\mathrm{e}\approx 1{,}995791369\,.$$

Z kolei czwarta kolumna jest średnio dłuższa od trzeciej począwszy od $n=13$, a jej graniczna długość to

$$\mathrm{e}^4-4\mathrm{e}^3+4\mathrm{e}^2-\frac{2}{3}\mathrm{e}\approx 2{,}00003885\,.$$

Piąta kolumna natomiast jest średnio dłuższa od czwartej dla $n\geqslant 20$ i ma graniczną długość

$$\mathrm{e}^5-5\mathrm{e}^4+\frac{15}{2}\mathrm{e}^3-\frac{10}{3}\mathrm{e}^2+\frac{5}{24}\mathrm{e}\approx 2{,}000057579\,.$$

Przyznaję uczciwie, że robi się to nudne. Każda następna kolumna jest średnio dłuższa od poprzedniej dla dużych n, a jej graniczna długość dana jest jakimś wzorkiem z e.

Średnia długość szóstej kolumny jest w granicy równa

$$\mathrm{e}^6-6\mathrm{e}^5+12\mathrm{e}^4-9\mathrm{e}^3+2\mathrm{e}^2-\frac{\mathrm{e}}{20}\approx 2{,}000005073$$

9	$2-5{,}157\cdot 10^{-9}$
10	$2+1{,}206\cdot 10^{-9}$
11	$2+1{,}937\cdot 10^{-10}$
12	$2-9{,}085\cdot 10^{-14}$
13	$2-2{,}978\cdot 10^{-12}$
14	$2-2{,}810\cdot 10^{-13}$
15	$2+1{,}904\cdot 10^{-14}$
16	$2+6{,}113\cdot 10^{-15}$
17	$2+2{,}871\cdot 10^{-16}$
18	$2-6{,}653\cdot 10^{-17}$
19	$2-1{,}070\cdot 10^{-17}$
20	$2+5{,}949\cdot 10^{-21}$
21	$2+1{,}647\cdot 10^{-19}$
22	$2+1{,}551\cdot 10^{-20}$
23	$2-1{,}056\cdot 10^{-21}$
24	$2-3{,}380\cdot 10^{-22}$
24	$2-1{,}582\cdot 10^{-23}$

i jest **mniejsza** od długości piątej kolumny!

Piąta kolumna jest średnio najdłuższa ze wszystkich! I to począwszy od $n=20$.

Siódma kolumna jest średnio krótsza od szóstej i ma graniczną długość 1,9999996401.

Z kolei ósma jest średnio dłuższa od siódmej dla $n\geqslant 31$ i jej długość dąży do 1,9999998889.

Graniczne długości średnie kolejnych kolumn podane są w tabeli obok. Jak widać, są one bardzo bliskie 2.

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl