Zadanie o gwieździe

Michał MACHURA

Wśród wielu zadań i zagadek matematycznych spotkałem poniższe zadanie.

Położyć pięć patyczków i dziesięć monet tak, by na każdym patyczku leżały cztery monety.

Zadanie to przedstawili mi koledzy górnicy, a jego prawdziwy autor i pochodzenie są mi nieznane. W naszym języku zadanie brzmi:

Pięć prostych i dziesięć punktów ułożyć na płaszczyźnie w ten sposób, by na każdej prostej leżały cztery punkty.

Oznaczmy przez a_i liczbę punktów (spośród 10), które leżą na i prostych. Oczywiście

$$\sum_{i=0}^{5} a_i = 10.$$

Przeanalizujmy możliwe przypadki. Zauważmy, że jeżeli na każdej prostej leżą 4 punkty, to liczba $s = \sum_{i=0}^{5} i \cdot a_i$ musi równać się 20.

1. Wszystkie proste przecinają się w jednym punkcie. Wówczas

$$s \leqslant 1 \cdot 9 + 5 \cdot 1 = 14.$$

2. W pewnym punkcie przecinają się cztery proste. Wtedy

$$s \leqslant 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 17.$$

3. W jednym punkcie przecinają się trzy proste i wówczas

$$s \leqslant 1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 19.$$

4. W dwóch punktach przecinają się po trzy proste, a wtedy

$$s \leqslant 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 19.$$

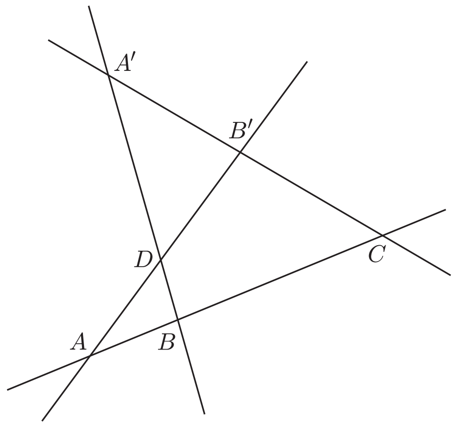
5. W żadnym punkcie nie przecinają się więcej niż dwie proste. W tym przypadku możliwe jest, by s było równe 20 – wystarczy jedynie, by nie było par prostych równoległych i wtedy punkty należy położyć tam, gdzie przecinają się proste.

Jak widzimy, problem sprowadza się do ułożenia prostych tak, aby każda z każdą się przecinała i nie było punktów, w których przecinają się więcej niż dwie proste. W tym momencie jawi nam się nowy problem:

na ile sposobów można położyć pięć prostych na płaszczyźnie tak, by każda z każdą się przecinała i by nie było punktów przecięcia więcej niż dwóch prostych?

Doprecyzujmy, co znaczą różne ułożenia prostych. Ułożenia prostych będziemy uważać za takie same (lepiej by rzec – izomorficzne), jeżeli proste rozetną płaszczyznę na tę samą liczbę trójkątów, czworokątów i pięciokątów, przy czym ich wzajemne ułożenie będzie takie same. Za chwilę uzasadnimy, że liczba $r(5)$ sposobów ułożenia pięciu prostych wynosi siedem.

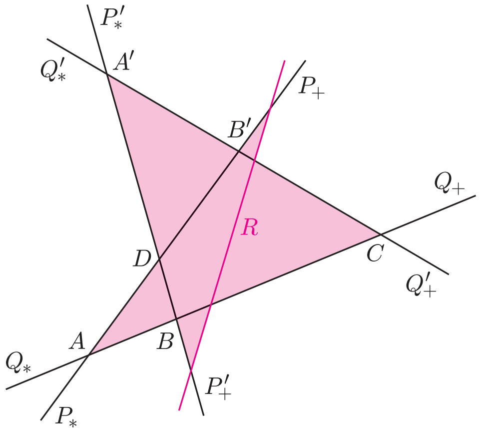
Zacznijmy od trzech i czterech prostych. Trzy proste (ułożone zgodnie z omówionymi zasadami) zawsze wyznaczą jeden trójkąt, a zatem $r(3) = 1$. Cztery proste zawsze wyznaczą jeden czworokąt i dwa trójkąty położone jak na rysunku poniżej. A więc $r(4) = 1$.



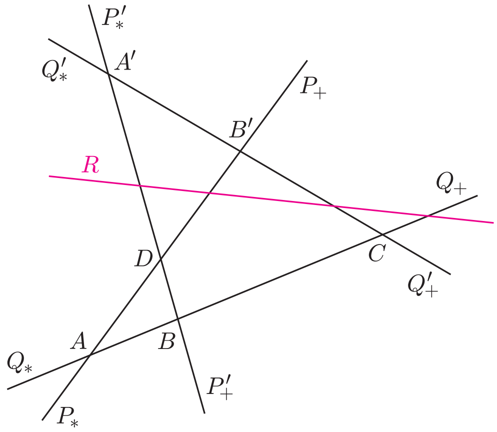
Zastanówmy się, jak powyższą figurę może przecinać piąta prosta. Wszystkie osiem możliwości przedstawiamy na rysunkach i w tabelce poniżej. Jedną z możliwości jest tytułowa pięcioramienna gwiazda.

Lp.	Prosta R przecina:	T	C	P	S	W
1	$BC, B'C, P_+, P'_+$	5	0	1	+	5
2	$B'C, B'D, A'D, Q_+$	4	1	1	+	6
3	$B'C, BD, AB, P_+$	3	3	0	–	3, 2
4	$B'C, BD, AD, Q_+$	3	3	0	–	1, 2
5	$B'D, BD, AB, A'B'$	3	3	0	+	7
6	AB, AD, Q'_+, P'_+	3	3	0	–	1, 3
6a	AB, AD, Q'_*, P'_*	3	3	0	–	1, 3
7	$A'B', A'D, AD, AB$	3	3	0	+	4

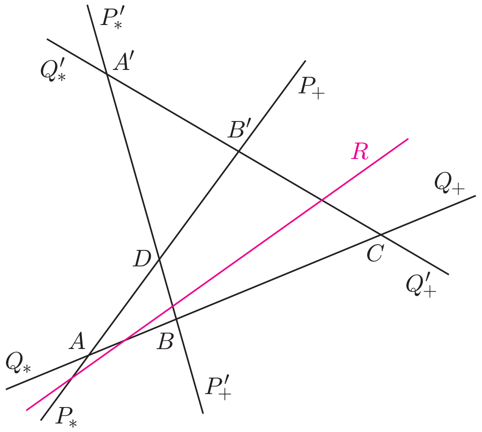
Przez T, C, P oznaczamy odpowiednio liczbę trójkątów, czworokątów i pięciokątów. W kolumnie S zaznaczyliśmy, czy figura będąca sumą trójkątów jest spójna, a w kolumnie W liczbę boków wspólnych z czworokątami i pięciokątami poszczególnych składowych spójnych. Jak widzimy, rozwiązania 6 oraz 6a są izomorficzne. Ostatecznie więc $r(5) = 7$. Co możemy powiedzieć w sytuacji, gdy dane jest n prostych? Jak szybko rośnie funkcja $r(n)$? Może ktoś z Czytelników coś wie na ten temat?



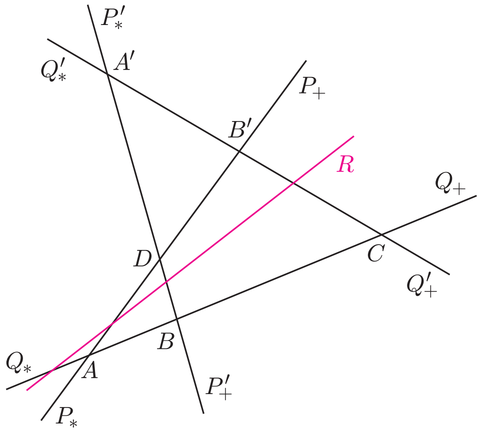
Rys. 1



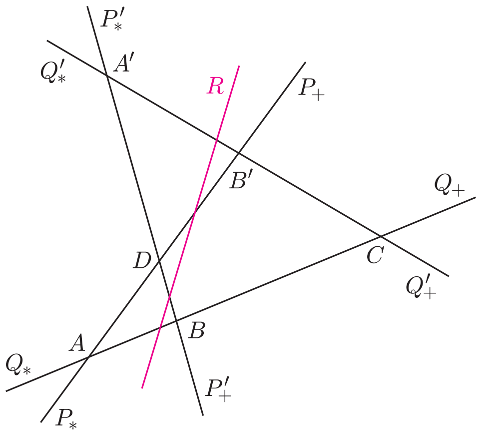
Rys. 2



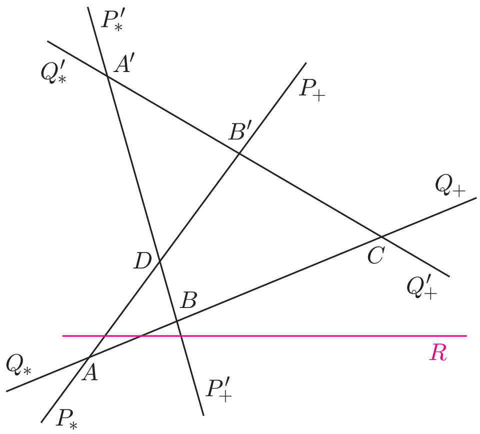
Rys. 3



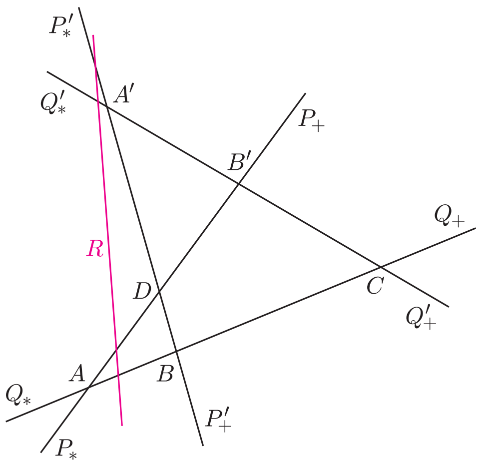
Rys. 4



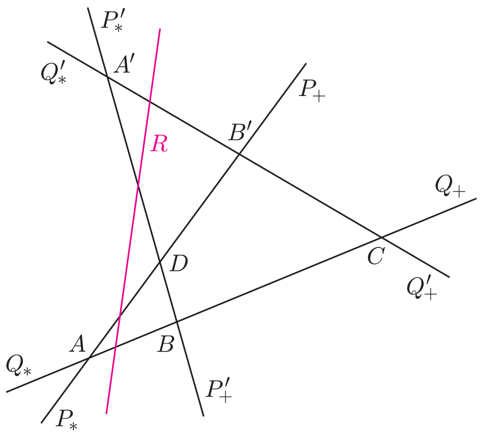
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 6a



Rys. 7