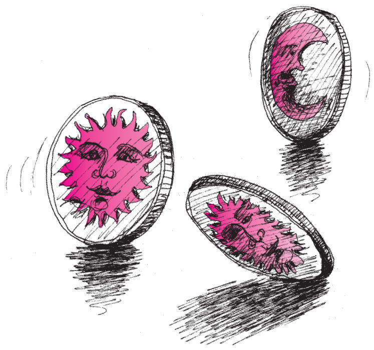
Nagrodzone prace
XXV Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jak już pisaliśmy, XXV Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki był wyjątkowo udany. Otrzymaliśmy wiele wartościowych i ciekawych prac. Finał okazał się bardzo zacięty. Jury długo debatowało nad kolejnością laureatów, w wyniku czego przyznano aż dwa złote medale. Z tego powodu chcemy w tym roku przedstawić nie jedną (jak bywało zazwyczaj) pracę, lecz siedem. Mamy nadzieję, że pozwoli to na lepsze zorientowanie się, jakie prace są przez Jury najwyżej cenione i może podsunie tegorocznym uczestnikom KUPzM jakieś nowe pomysły.

Przypominamy, że w tym roku zwycięzca i jego opiekun otrzymają dzięki firmie **GAMBIT** dodatkową nagrodę: profesjonalne wersje programu *Mathematica*.

Waga szalkowa i uogólniony problem fałszywej monety



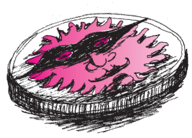
Hugo Steinhaus w „Kalejdoskopie matematycznym" przedstawił następujące zadania:

> *Mamy dziewięć monet pozornie jednakowych. Wiemy, że jedna z nich (nie wiemy która) jest fałszywa i waży mniej od pozostałych. Trzeba ją wykryć w dwóch ważeniach na wadze szalkowej bez użycia odważników (wolno kłaść po kilka monet na każdej szalce).*

oraz

> *Mamy trzynaście monet, z których dokładnie jedna jest fałszywa, ale nie wiemy, czy jest cięższa, czy lżejsza od monet dobrych. Mamy ją wykryć w trzech ważeniach na wadze szalkowej.*

W mojej pracy przedstawiam rozważania dotyczące możliwie szerokiej klasy podobnych problemów. Łącznie rozważam 48 wariantów zadań Steinhausa. Ze względu na dużą ich liczbę oraz znaczne podobieństwo podam treści wszystkich tych wariantów łącznie. Konkretny wariant jest wyznaczony przez wybór pięciu liter.



Dane są dwie liczby naturalne n i k.

Wiemy, że wśród n monet

A) na pewno **B**) być może

jedna moneta jest fałszywa i ma inną masę niż pozostałe monety.

C) Wiemy, **D**) Nie wiemy,

czy jest ona cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet.

Oprócz tego mamy do dyspozycji

E) 0 **F**) 1 **G**) nieskończenie wiele

dodatkowych monet dobrych.

Naszym zadaniem jest ustalić, czy da się za pomocą k ważeń na wadze szalkowej, bez użycia odważników (używamy tylko monet)

H) stwierdzić, czy któraś z monet jest fałszywa, a jeśli tak, to wskazać ją.

I) stwierdzić, czy któraś z monet jest fałszywa, a jeśli tak, to wskazać ją i określić, czy jest cięższa, czy lżejsza od dobrych monet.

i

Ponadto od tych k ważeń

J) wymaga się, **K**) nie wymaga się,

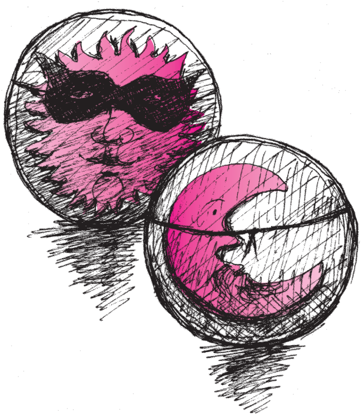
aby to, jakie monety biorą udział w kolejnych ważeniach, było wiadome jeszcze przed wykonaniem pierwszego ważenia (czyli nie możemy uzależnić wyboru monet do ważenia od wyników wcześniejszych ważeń).

Treść pojedynczego wariantu jest wyznaczona przez wybranie jednej z liter **A** lub **B**, jednej z liter **C** lub **D**, jednej z **E**, **F** lub **G** oraz **H** lub **I** i jednej z liter **J** lub **K**. Oryginalne zadania Steinhausa można określić zatem jako warianty **ACEHK** z $n = 9$ i $k = 2$ oraz **ADEHK** z $n = 13$ i $k = 3$ naszego uogólnionego zadania. Dla ustalonych n, k oraz wariantu zadania odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie może być twierdząca lub przecząca.
W przypadku odpowiedzi przeczącej trzeba uzasadnić, że faktycznie k ważeń nie wystarcza do wskazania fałszywej monety, natomiast w przypadku odpowiedzi twierdzącej trzeba podać algorytm wykonywania ważeń.

Podam teraz w tabelach wyniki, które uzasadniam w pracy. W wariantach, w których wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (**C**), odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest pozytywna, gdy

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">E</td><td rowspan="2">F/G</td></tr>
<tr><td>J</td><td>K</td></tr>
<tr><td>A
Zadanie ma sens dla $n \geqslant 1$</td><td>$n \leqslant 3^k$</td><td>$n \leqslant 3^k$</td><td>$n \leqslant 3^k$</td></tr>
<tr><td>B</td><td>$n \leqslant 3^k - 1$
$n \neq 1$
$n \neq 3^k - 2$</td><td>$n \leqslant 3^k - 1$
$n \neq 1$</td><td>$n \leqslant 3^k - 1$</td></tr>
</table>

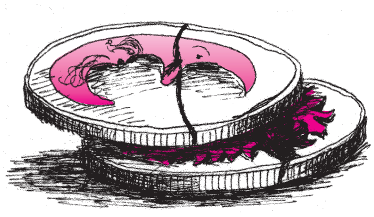
W wariantach, w których nie wiemy, czy fałszywa moneta jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych monet (**D**), odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest pozytywna, gdy



<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>E</td><td>F/G</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A
Zadanie ma sens dla $n \geqslant 1$</td><td>H</td><td>$n \leqslant (3^k + 1)/2$
$n \neq 2$</td><td>$n \leqslant (3^k + 1)/2$</td></tr>
<tr><td>I</td><td>$n \leqslant (3^k - 3)/2$
$n \neq 1$
$n \neq 2$</td><td>$n \leqslant (3^k - 3)/2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">B</td><td>$n \leqslant (3^k - 3)/2$ lub $n = 0$
$n \neq 1$
$n \neq 2$</td><td>$n \leqslant (3^k - 1)/2$</td></tr>
</table>

Na przykład nie jest możliwe wskazanie wśród 40 monet fałszywej monety poprzez wykonanie 4 ważeń na wadze szalkowej, gdy nie mamy dodatkowych monet, nie wiemy, czy fałszywa moneta w ogóle istnieje i czy gdyby istniała, byłaby cięższa, czy lżejsza od pozostałych ($40 > 39 = (3^4 - 3)/2$).

Z powyższych tabel wynika, że gdy mamy do dyspozycji dodatkowe dobre monety, wówczas nie ma znaczenia ich liczba. Zawsze poradzimy sobie, wykorzystując tylko jedną z nich.



Niemal zawsze ważenia można zaplanować z góry. Jedynymi wyjątkami są warianty **BCEHK** oraz **BCEIK**, w przypadku których nie możemy zaplanować ważeń, gdy $n = 3^k - 2$.

Marcel KOŁODZIEJCZYK, I LO im. Kopernika w Łodzi – **ZŁOTY MEDAL**

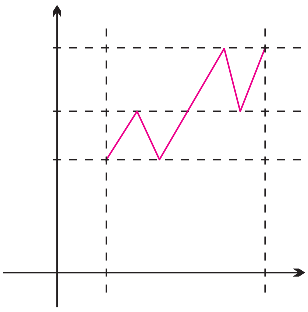
O istnieniu funkcji ciągłej przyjmującej każdą wartość z góry zadaną ilość razy

Interesuje nas następujący problem:

Dana jest funkcja $N : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ (przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$). Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ funkcja f przyjmuje wartość x dokładnie $N(x)$ razy?

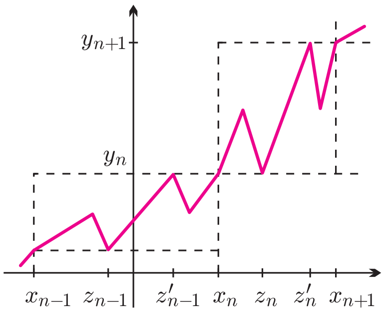
Przyjrzyjmy się na początek paru przykładom.

Dla $N \equiv 1$ żądana funkcja istnieje. Przykładem jej jest każda funkcja liniowa niestała. Również dla $N \equiv 3$ możemy skonstruować żądaną funkcję. Konstrukcja ta polega, mówiąc obrazowo, na „sklejaniu” funkcji takich jak na rysunku 1.



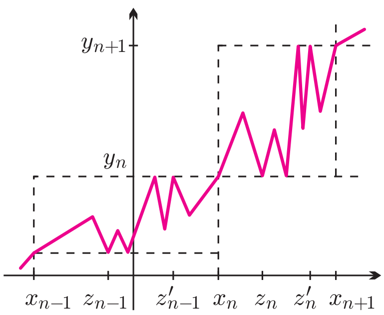
Rys. 1

Bardziej formalnie, ustalamy dowolne ciągi $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ i $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, rosnące, nieograniczone zarówno z góry, jak i z dołu. A następnie w każdy z prostokątów wyznaczonych przez x_n, x_{n+1}, y_n, y_{n+1} wpisujemy taki „zygzak” jak na rysunku 1. Otrzymana funkcja ciągła jest przedstawiona na rysunku 2.



Rys. 2

Z takiej funkcji można w dość prosty sposób otrzymać funkcję ciągłą przyjmującą każdą wartość rzeczywistą 5 razy. Wycinamy funkcję na każdym z odcinków $[z_n, z'_n]$ i w to miejsce wklejamy „zygzak”, analogiczny do tego na rysunku 1. Wykres żądanej funkcji przedstawia rysunek 3.



Rys. 3

Analogicznie można otrzymać funkcję ciągłą wyznaczoną przez $N \equiv 7$, $N \equiv 9$, $N \equiv 11$, itd.

Zastanówmy się teraz, czy istnieje funkcja ciągła wyznaczona przez $N \equiv 2\ldots$ Otóż nie. Co więcej, można podać pełną charakteryzację funkcji N, które wyznaczają funkcje ciągłe. Przedstawimy ją tutaj przy dodatkowym założeniu, że $N > 0$. W ogólnym przypadku jest ona nieco bardziej złożona.

Twierdzenie. Niech $N > 0$. Wówczas na to, by istniała funkcja ciągła f wyznaczona przez funkcję N, potrzeba i wystarcza, by dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{R}$ istniało $\varepsilon > 0$, takie że jeśli $x \in (z-\varepsilon, z)$ i $y \in (z, z+\varepsilon)$, to zachodzi zależność $\frac{N(x)+N(y)}{2} \geqslant N(z)$ w przypadku, gdy przynajmniej jedna z liczb $N(x)$ i $N(y)$ jest nieparzysta, natomiast $\frac{N(x)+N(y)}{2} > N(z)$ w przypadku, gdy każda z liczb $N(x)$ i $N(y)$ jest parzysta.

Dowód konieczności warunków twierdzenia.
Potrzebny będzie następujący lemat, którego dowód oparty na własności Darboux pozostawiamy Czytelnikowi.

Lemat. Niech $f : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, która każdą wartość rzeczywistą przyjmuje skończenie wiele razy i przynajmniej jeden raz. Wówczas

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

lub

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

Powróćmy do dowodu twierdzenia. Weźmy dowolne $z \in \mathbb{R}$. Niech $N(z) = n$. Niech $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ będą wszystkimi punktami o własności

$$z = f(a_1) = f(a_2) = \ldots = f(a_n).$$

Rozważmy wówczas przedziały (a_k, a_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots, n$. Dla każdego z nich wybierzmy $b_k \in (a_k, a_{k+1})$. Wartość $f(b_k)$ jest różna od z. Podobnie, weźmy $b_0 \in (-\infty, a_1)$ i $b_n \in (a_n, \infty)$. Wartości $f(b_0)$ i $f(b_n)$ są różne od z. Ustalmy

$$\varepsilon = \min\{|f(b_k) - z| : \ k = 0, 1, \ldots, n\}.$$

Z własności Darboux wynika, że na każdym z przedziałów $(-\infty, a_1]$, $[a_1, b_1]$, $[b_1, a_2]$, $\ldots$, $[a_k, b_k]$, $[b_k, a_{k+1}]$, $\ldots$, $[a_n, \infty)$ wartość $x \in (z-\varepsilon, z)$ lub wartość $y \in (z, z+\varepsilon)$ przyjmowana jest przynajmniej raz. Ponieważ tych przedziałów jest $2n$, to zachodzi

$$\tfrac{1}{2}(N(x) + N(y)) \geqslant N(z).$$

Z równości $(N(x) + N(y)) = 2N(z)$ wynika, że na każdym z przedziałów $[a_k, a_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ dokładnie jedna z wartości x lub y musi być przyjmowana dokładnie dwa razy, a na przedziałach $(-\infty, a_1]$, $[a_n, \infty)$ dokładnie jeden raz. Przy dodatkowym założeniu parzystości $N(x)$ i $N(y)$ mamy, że na obu przedziałach $(-\infty, a_1]$, $[a_n, \infty)$ jest przyjmowana wartość x (lub y). A to oznacza, że $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ nie mogą być jednocześnie różne i niewłaściwe. Sprzeczność.

Dla N spełniającego warunki twierdzenia można podać konstrukcję funkcji ciągłej f wyznaczonej przez to N.

Aleksandra KWIATKOWSKA, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu – **ZŁOTY MEDAL**

O rozrzedzeniach zbioru liczb naturalnych i szeregach P-harmonicznych

Zacznijmy od następującego zadania: rozważmy zbiór wszystkich liczb naturalnych, które mają zero w zapisie dziesiętnym. Czy szereg ich odwrotności jest zbieżny? A jeśli zero zastąpimy inną cyfrą?

Aby znaleźć odpowiedź na postawione wyżej pytanie, nie wystarczy biegle posługiwać się kryteriami znanymi dobrze z kursu analizy matematycznej, ponieważ niemożliwe jest znalezienie ogólnej postaci liczb niemających danej cyfry w zapisie dziesiętnym. Można natomiast wyznaczyć ich gęstość (rozumianą intuicyjnie) w zbiorze liczb naturalnych i na tej podstawie określić zbieżność szeregu. Tym właśnie zajmowałem się w mojej pracy. Niżej przedstawię główny wynik otrzymany przeze mnie, chętnych do przeczytania całego artykułu proszę o kontakt ze mną (julekj@interia.pl).

Poniżej wprowadzimy kilka pojęć potrzebnych w dalszym ciągu.

Definicja 1. Szereg odwrotności liczb naturalnych, tzn. szereg postaci

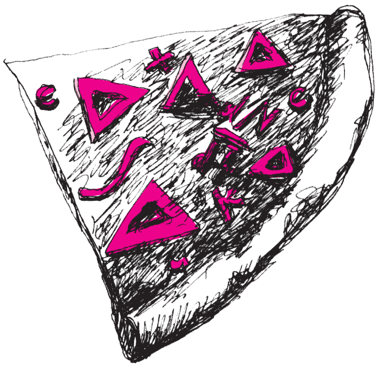
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

nazywać będziemy szeregiem harmonicznym.

Definicja 2. Nieskończony zbiór $P \subseteq \mathbb{N}$ nazywamy rozrzedzeniem zbioru liczb naturalnych lub po prostu rozrzedzeniem.

Definicja 3. Niech $P \subseteq \mathbb{N}$ będzie rozrzedzeniem. Szereg $\sum\limits_{n \in P} \frac{1}{n}$ nazywać będziemy szeregiem P-harmonicznym.

Oznaczmy teraz $P_n = P \cap \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\quad p(n) = \#P_n$, gdzie $\#P_n$ oznacza liczbę elementów P_n. Możemy teraz przedstawić główny wynik pracy.



Twierdzenie. Niech P będzie rozrzedzeniem zbioru liczb naturalnych. Wtedy

$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(a_n)}{a_n} < \infty\,,$$

gdzie a_n jest dowolnym ciągiem liczb naturalnych, takim że $1 < c \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant C$, dla pewnych liczb rzeczywistych c, C.

Nie będziemy tu dowodzić powyższego twierdzenia, zajmiemy się tylko pokazaniem dwóch jego zastosowań.

1. Niech P będzie zbiorem liczb naturalnych niemających w zapisie dziesiętnym cyfry i. Weźmy ciąg $a_n = 10^n$ spełniający warunek z twierdzenia. W każdym z przedziałów $[10^k, 10^{k+1}]$ zostaje 9^{k+1} rozważanych liczb.
Stąd $p(10^n) = 9 + 9^2 + \ldots + 9^n = \frac{9}{8}(9^n - 1)$.

$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(10^n)}{10^n} < \infty\,.$$

Ponieważ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{9}{8}(9^{n+1}-1)}{10^{n+1}} \frac{10^n}{\frac{9}{8}(9^n-1)} = \frac{9}{10}$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(10^n)}{10^n} < \infty \quad \text{i} \quad \sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty.$$

2. Niech P będzie zbiorem liczb pierwszych. Wybierając ciąg $a_n = 2^n$, otrzymujemy

$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n} < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(2^n)}{2^n}\,.$$

Ale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(2^n)}{2^n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12 \log 2^n} = \frac{1}{12 \log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,.$$

Zatem szereg P-harmoniczny jest rozbieżny.

Juliusz JABŁECKI, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu – **SREBRNY MEDAL**

Problem komiwojażera

Problem komiwojażera przedstawia się następująco. Komiwojażer wyjeżdża z miasta nr 1, przejeżdża przez pewien zbiór miast, po czym wraca do miasta, z którego wyjechał. Im szybciej pokona tę drogę, tym lepiej. Nasze zadanie polega na znalezieniu najkrótszego cyklu przechodzącego przez wszystkie miasta dokładnie raz. Opiszę, jak znaleźć długość najkrótszej drogi, jednakże posługując się tymi metodami, otrzymuje się także trasę komiwojażera.

Problem można oczywiście rozwiązać, przeszukując wszystkie możliwości. Dla 2 miast jest jedna możliwość. Dla 3 miast dwie możliwości $\{ABCA; ACBA\}$, dla czterech miast liczba możliwości wynosi 6: $\{ABCDA; ACDBA; ACBDA; ADCBA; ABDCA; ADBCA\}$. Ogólnie mamy $(n-1)!$ możliwych przypadków do przeanalizowania. Dla 49 miast liczba możliwości będzie sięgała 48! przypadków, czyli w zaokrągleniu około: $1{,}241391559 \cdot 10^{61}$. Przy założeniu, że jesteśmy w stanie liczyć miliard kombinacji na sekundę, program działałby $2 \cdot 10^{34}$ razy tyle co wiek naszego Wszechświata.

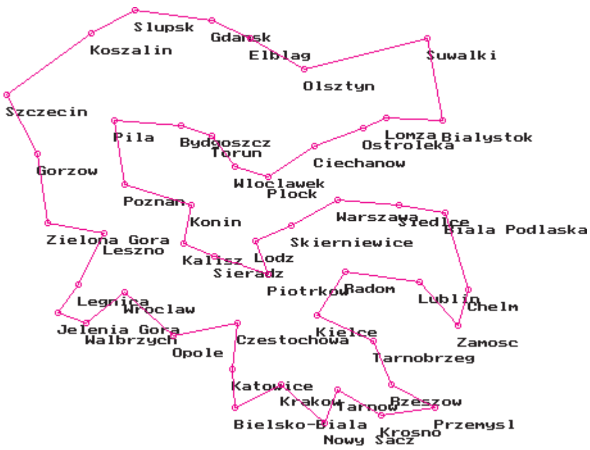
Problem ten można jednak rozwiązać metodą programowania dynamicznego. Oznaczmy przez $D(x,y)$ długość drogi z miasta x do miasta y. Niech $L(x,S)$ oznacza długość najkrótszej drogi z miasta x, przechodzącej przez wszystkie miasta ze zbioru S – przez każde dokładnie raz – kończącej się na mieście nr 1. Jeśli oznaczymy zbiór wszystkich miast jako X, to $L(1, X \setminus \{1\})$ jest interesującym nas rozwiązaniem problemu komiwojażera. $L(x,S)$ możemy łatwo obliczyć. Komiwojażer z miasta x pojedzie najpierw do jednego miasta ze zbioru S, a później możliwie krótką drogą przejedzie przez resztę miast ze zbioru S, aż do miasta nr 1. Tak więc $L(x,S) = \min\limits_{y \in S} \big(D(x,y) + L(y, S \setminus \{y\})\big)$.

Metoda programowania dynamicznego jest szybsza od przeszukiwania wszystkich możliwości. Złożoność czasowa jest rzędu $n^2 2^n$. Niestety metoda ta wymaga sporej pamięci (złożoność pamięciowa jest rzędu $n2^n$, już dla 22 miast potrzeba ponad 2 MB pamięci operacyjnej). Dodatkowo trudno jest taki algorytm optymalizować.

Przeszukiwanie wszystkich możliwości można jednak usprawnić, co, jak się okazuje, daje lepsze rezultaty. Załóżmy więc, że mamy najkrótszą dotychczas znalezioną drogę komiwojażera – cykl A. Mamy też jakąś drogę B przechodzącą przez k miast, gdzie $k < n$. Jeśli długość drogi B jest większa od długości cyklu A, to nie warto, oczywiście, już jej rozważać. W ten sposób nie będziemy analizować wszystkich możliwości.

Oczywiście usprawnienie to można także ulepszyć. Spróbujmy oszacować, o ile co najmniej wydłuży naszą drogę B dodanie do niej pozostałych $n-k$ miast. Są różne metody – jedne zabierają dużo czasu, inne z kolei dają mniej dokładny wynik. W tym przypadku opłaca się przeznaczyć więcej czasu na dokładniejsze oszacowanie. Na miastach skrajnych drogi B oraz miastach nieprzyłączonych do naszej drogi budujemy minimalne drzewo spinające (MST). Długość takiego drzewa jest niewiększa od długości drogi, która będzie domykać naszą drogę. Co za tym idzie, cykl powstały z drogi B wraz z dołączonymi do niej pozostałymi miastami nie będzie dłuższy od sumy długości drogi B i długości MST. Pozostaje więc tylko zbudowanie MST. W tym celu posługuję się tzw. algorytmem Kruskala (dokładny opis oraz dowód poprawności algorytmu znajduje się w książce K.A. Ross, Ch.R.B. Wright, „Matematyka dyskretna"). Kolejne przyspieszenie można uzyskać na czasie budowania MST. Program budowałby MST dla tych samych miast wiele razy, można więc je zapamiętywać. W tym celu użyłem techniki haszowania – zapamiętywałem MST w tablicy list. Oczywiście nie zapamiętałem wszystkich drzew. Po pierwsze zabrakłoby pamięci operacyjnej, po drugie zaś i przede wszystkim nie opłaca się ich zapamiętywać, gdyż listy wydłużyłyby się za bardzo i wyszukiwanie interesujących nas MST trwałoby zbyt długo. Dlatego też zapamiętywałem tylko MST składające się z co najwyżej 5 miast.

Na koniec można jeszcze zauważyć, iż wszystkie dotychczasowe optymalizacje opierały się na założeniu, iż mam już jakąś drogę przybliżoną. Przed uruchomieniem głównej procedury program liczył więc drogę przybliżoną. W tym celu posługiwałem się algorytmami opisanymi w książce M.M. Sysło, N. Deo, J.S. Kowalik, „Algorytmy optymalizacji dyskretnej" oraz opisanymi w niej tzw. 2- oraz 3-optymalizacjami. W ten sposób uzyskana droga przybliżona była dłuższa od cyklu minimalnego o około 0–6%. Dane do programu zostały wprowadzone w formie współrzędnych na mapie. Długości między miastami były zaś odległościami pomiędzy punktami na mapie. Ostatecznie program dla 49 miast wojewódzkich według starego podziału administracyjnego Polski działał około 2 godzin 30 minut. Drogę przybliżoną liczył około 48 sekund. Długość drogi przybliżonej wynosiła około 3699 km, a długość drogi optymalnej wynosiła około 3580 km.



Aktualny światowy rekord pochodzi z 2001 roku. Ustanowili go D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, i W. Cook, którzy rozwiązali problem komiwojażera dla 15112 miast. Tę i inne informacje dotyczące problemu komiwojażera można znaleźć na stronie internetowej: `www.math.princeton.edu/tsp/index.html`

Krzysztof MROCZEK, Liceum Przymierza Rodzin w Warszawie – **BRĄZOWY MEDAL**

Wielowymiarowe muzeum i jego strażnicy

Punktem wyjścia moich rozważań jest rozdział 28 „Strażnicy w muzeum” książki M. Aignera i G.M. Zieglera „Dowody z Księgi”, gdzie przedstawiony został problem przedstawiony przez V. Klee oraz jego rozwiązanie.

> *W rogach wielokątnego muzeum umieszczamy strażników. Zakładamy, że muzeum jest pilnowane, gdy dowolny punkt wewnątrz łączy się przynajmniej z jednym z obranych wierzchołków (strażnikiem), nie przecinając żadnej z krawędzi. Ilu strażników potrzeba do pilnowania muzeum?*

Z rozwiązania wynika, że do pilnowania dowolnego n-kąta wystarczy $[n/3]$ strażników. Nasuwa się pytanie, czy podobne zależności istnieją w wyższych wymiarach?

Trójwymiarowe muzeum

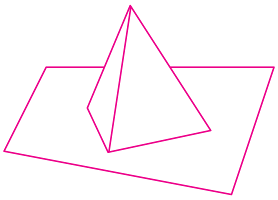
Dany jest wielościan o n krawędziach i m ścianach. Suma krawędzi wszystkich ścian wynosi $2n$. Tworzymy siatkę wielościanu i dokonujemy jej triangulacji (podziału na trójkąty). Ponieważ dowolny n-kąt dzieli się na $n-2$ trójkąty, więc liczba powstałych trójkątów wynosi:

$$x_1 - 2 + x_2 - 2 + \ldots + x_m - 2 = 2n - 2m,$$

gdzie x_i oznacza liczbę krawędzi i-tej ściany. Potraktujmy siatkę jako wielokąt. Znając liczbę tworzących go trójkątów, wyznaczamy liczbę jego krawędzi: $2n - 2m + 2$. Z twierdzenia o strażnikach otrzymujemy liczbę strażników potrzebnych do pilnowania powierzchni siatki:

$$[(2/3)(n - m + 1)].$$

Rozważmy teraz sytuację, kiedy poruszając się wzdłuż krawędzi, nie możemy dotrzeć do dowolnego wierzchołka.



Do pilnowania ściany o t krawędziach zewnętrznych i u wewnętrznych (wokół dziury) wystarczy

$$[t/3] + [u/3]$$

strażników ($[u/3]$ strażników wokół dziury). Jako że $[t/3] + [u/3] \leqslant [(t+u)/3]$, sytuacja ta nie wymusza umieszczania dodatkowych strażników.

Pozostaje sprawdzić, czy fakt obserwowania siatki wystarcza do pilnowania przestrzeni wewnątrz wielościanu. Weźmy dowolny punkt A wewnątrz wielościanu. Tworzymy odcinek łączący ten punkt z pewnym strażnikiem. Jeśli odcinek nie przecina żadnej ściany, jest to koniec dowodu. Jeżeli przecina, prowadzimy odcinek łączący punkt A ze strażnikiem na tej ścianie. Jeśli również ten odcinek przecina jakąś ścianę, powtarzamy rozumowanie. Jako że liczba ścian jest skończona, powyższe rozumowanie też jest skończone. Wynika stąd, że znajdziemy odcinek nieprzecinający żadnej ściany, łączący punkt A ze strażnikiem. Wnioskujemy, że do pilnowania wielościanu o m ścianach i n wierzchołkach wystarczy

$$[(2/3)(n - m + 1)]$$

strażników.

Czterowymiarowe muzeum

Wyznaczenie liczby strażników w wielościanie czterowymiarowym nie jest już tak proste i wymaga znalezienia pewnych jego własności. W tym celu skorzystamy z założeń metody Fechnera. Mówi ona, że ze stosunku świata płaskiego do przestrzennego dadzą się wyprowadzić relacje, które powinny istnieć między światem trój- a czterowymiarowym (dla uproszczenia figury czterowymiarowe zapisywane będą jako figury 4D, natomiast trójwymiarowe jako 3D, itd.).

Znajdźmy analogie między światem dwu- i trójwymiarowym. Rozpatrzmy krzywą zamkniętą. Rozcinając ją, tworzymy jej jednowymiarową siatkę. Z kolei siatka wielościanu 3D jest dwuwymiarowa. Analogicznie siatka wielościanu 4D jest trójwymiarowa.

Zauważamy, że w dwóch wymiarach każdy wierzchołek należy do dwóch boków. W wielościanie krawędź należy do dwu ścian. Tak więc w wielościanie 4D każda ze ścian należy do dwu figur 3D. Zauważamy teraz, że w wielościanie 4D każda z krawędzi powinna łączyć się z co najmniej trzema ścianami (analogicznie w wielokącie 3D każdy wierzchołek łączy się z co najmniej 3 krawędziami). Wyznaczmy teraz liczbę strażników wielościanu 4D o n krawędziach i m ścianach. Suma liczby ścian figur 3D wielościanu wynosi $2m$. Wiemy, że każda krawędź należy do co najmniej trzech ścian, a więc i figur 3D. Jednocześnie nie należy ona do co najmniej dwu ścian każdej z nich. Wiedząc, że każda ściana należy do dwu figur 3D, wnioskujemy, że każda krawędź nie należy do co najmniej trzech ścian. Możemy teraz oszacować liczbę krawędzi figur 3D:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_s \leqslant n(m-3),$$

gdzie a_i oznacza liczbę krawędzi i-tej figury. Potraktujmy figury 3D jako wielościany 3D. Wyznaczamy sumę trójkątów powstałych w wyniku triangulacji ich siatek:

$$2a_1 - 2b_1 + 2a_2 - 2b_2 + \ldots + 2a_s - 2b_s,$$

gdzie b_i oznacza liczbę ścian i-tej figury. Wiedząc, że każda ze ścian (trójkątów) należy do 2 wielościanów 3D, wyznaczamy liczbę trójkątów figury 4D i szacujemy ją z góry: $\{n(m-3) - 2m + 2\}/3$. Analogicznie do dowodu twierdzenia o strażnikach w 3D muzeum, rozpatrujemy przypadek istnienia figur 3D z dziurą. Z twierdzenia o strażnikach otrzymujemy liczbę strażników potrzebnych do pilnowania 4D muzeum:

$$[\{n(m-3) - 2m + 2\}/3].$$

Piotr SZAFRUGA, II LO im. Jana III Sobieskiego w Krakowie – **BRĄZOWY MEDAL**

O porządkowaniu zależności wektorów losowych związanym z pewną klasą funkcji

W pracy zajęliśmy się opisem zależności dla zmiennych losowych. W „klasycznej" probabilistyce szkolnej zakłada się zazwyczaj ich niezależność, np. przy próbach Bernoulliego. Założenie to nie jest jednak zawsze spełnione, np. przy schemacie urnowym i losowaniu bez zwracania. Co więcej, znacznie częściej mamy do czynienia ze zmiennymi zależnymi.

Badając zależne zmienne losowe, musimy umieć porządkować zależność i mierzyć jej siłę. Najpopularniejszą miarą siły zależności jest kowariancja. Ma ona jednak swoje poważne wady, m.in. są przykłady zmiennych losowych, które są zależne, a mimo to kowariancja dla nich wynosi 0, jak dla zmiennych niezależnych. Co więcej, kowariancja działa dla par zmiennych losowych, a są przykłady wektorów losowych, gdzie mimo, że każda z par zmiennych losowych jest niezależna, to cały wektor jest wektorem zależnych zmiennych losowych.

Dlatego zajęliśmy się innym podejściem do opisu zależności i jej porządkowania. Posługujemy się w tym celu tzw. funkcjami supermodularnymi. Jeśli funkcja $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, to jest supermodularna wtedy, gdy każda jej druga pochodna cząstkowa jest nieujemna. Zaletą tej definicji jest to, że korzystając z niej w łatwy sposób bada się supermodularność danej funkcji. Wadą – założenie, że funkcja musi być dwukrotnie różniczkowalna, co wyklucza takie funkcje jak $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\min(x_1,\ldots,x_n)$, które również są supermodularne przy odpowiednio zmodyfikowanej definicji (przykłady takich definicji podajemy w pracy). Inne funkcje supermodularne to: średnie – arytmetyczna i geometryczna,

$$\phi(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i),$$

gdzie $f \in C^1$ jest rosnąca i nieujemna, a także

$$\phi(x_1,\ldots,x_n)=f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right),$$

gdzie $f \in C^2$ jest wypukła.

Funkcja f jest klasy C^k, jeśli jej k-ta pochodna jest ciągła.

Mając daną klasę funkcji supermodularnych można wprowadzić ogólną definicję zależności n-wymiarowych wektorów losowych, tzn. wektorów, których współrzędnymi są zmienne losowe. Powiemy, że

wektor $\widetilde{X}=(\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,\ldots,\widetilde{X}_n)$ *jest bardziej* ϕ*-zależny od wektora* $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$*, co zapisujemy następująco*

$$(\widetilde{X}_1,\widetilde{X}_2,\ldots,\widetilde{X}_n) \succ_\phi (X_1,X_2,\ldots,X_n),$$

jeżeli dla każdej ϕ *supermodularnej zachodzi nierówność* $E(\phi(\widetilde{X})) \geqslant E(\phi(X))$.

Korzystając z tej definicji możemy już badać zależności między wektorami losowymi.

Interesuje nas, jakie wektory są maksymalnie, a jakie minimalnie ϕ-zależne.

W ogólnym, n-wymiarowym przypadku rozważamy wektory losowe $X=(X_1,\ldots,X_n)$, które przyjmują z jednakowym prawdopodobieństwem wartości z pewnego zbioru skończonego $\{(x_1^1,\ldots,x_1^n),\ldots,(x_m^1,\ldots,x_m^n)\}$. Okazuje się, że maksymalnie zależny (tzn. bardziej zależny od dowolnego innego, którego kolejne zmienne losowe przyjmują wartości $X_i \in \{x_1^i,\ldots,x_m^i\}$ dla $i=1,\ldots,n$) jest wektor $\overline{X}=(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n)$, taki że wartości zmiennych losowych są uporządkowane monotonicznie (np. rosnąco). Mamy więc

$$(X_1,\ldots,X_n) \prec_\phi (\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n).$$

Inaczej jest z minimalną zależnością. Nie można, tak jak w przypadku maksymalnej zależności, wskazać jakiegoś konkretnego wektora, który byłby mniej ϕ-zależny od dowolnego innego. Przez badanie minimalnej ϕ-zależności rozumieliśmy więc badanie zależności między wektorami

$$(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_k,\underline{X}_{k+1},\ldots,\underline{X}_n)$$

oraz

$$(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{k+1},\underline{X}_{k+2},\ldots,\underline{X}_n)$$

dla $k \geqslant [\frac{n}{2}]+1$ (w pierwszym z wektorów k kolejnych zmiennych losowych przyjmuje wartości uporządkowane rosnąco, a w drugim $k+1$, natomiast wszystkie pozostałe zmienne przyjmują wartości uporządkowane malejąco). Badaliśmy więc „nierówności"

$$(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_k,\underline{X}_{k+1},\ldots,\underline{X}_n) \prec_\phi \prec_\phi (\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{k+1},\underline{X}_{k+2},\ldots,\underline{X}_n).$$

Okazało się, że supermodularność funkcji ϕ nie gwarantuje, że wszystkie te nierówności zachodzą. Dla pewnych supermodularnych ϕ bardziej ϕ-zależny był wektor

$$(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_k,\underline{X}_{k+1},\ldots,\underline{X}_n),$$

a dla innych wektor

$$(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_{k+1},\underline{X}_{k+2},\ldots,\underline{X}_n).$$

Nierówności te zachodzą tylko dla wąskiej klasy funkcji, i to tylko przy pewnych dodatkowych założeniach o wartościach, jakie przyjmują zmienne losowe.

Wyniki, jakie otrzymaliśmy mogą mieć kilka zastosowań. Tutaj powiemy może o jednym z nich, o porównywaniu czasów pracy złożonych układów. Wyobraźmy sobie, że układ składa się z elementów, których czasy pracy są zależnymi zmiennymi losowymi. Wówczas czas pracy całego takiego układu jest wektorem losowym. Okazuje się, że przy połączeniu równoległym elementów układu prawdopodobieństwo, że układ bardziej zależny będzie działał dłużej jest większe niż prawdopodobieństwo, że dłużej będzie działał układ mniej zależny. Odwrotnie jest natomiast przy połączeniu szeregowym elementów układu.

Juliusz JABŁECKI, Lech STAWIKOWSKI – **WYRÓŻNIENIE**

O ukrytej podzielności wielomianów

Interesować nas będą wielomiany (o współczynnikach całkowitych) w „ukryty sposób" podzielne przez ustaloną liczbę n, tzn. takie wielomiany, których wartości dla dowolnych całkowitych argumentów są podzielne przez n. Przypadek, gdy wszystkie współczynniki wielomianu są podzielne przez n, jest oczywisty. Do tworzenia innych wielomianów o zadanej podzielności wykorzystamy kongruencje oraz twierdzenia Fermata i Eulera.

Rozważmy najpierw wielomiany jednej zmiennej (bez wyrazu stałego) i zbadajmy ich podzielność przez liczby pierwsze. Wartość zmiennej x może należeć do jednego z dwóch zbiorów:

albo: *x jest podzielne przez p i wartość wielomianu jest podzielna przez p,*

albo: *x jest względnie pierwsze z p (oznaczenie: $x \perp p$).*

Rozważenia wymaga tylko ten ostatni przypadek. Łatwo można wykazać, że nie istnieje wielomian stopnia niższego niż p, który miałby ukrytą podzielność przez p. Z Małego Twierdzenia Fermata

$$x^{p-1} \equiv 1 \mod p, \quad \text{dla } x \perp p$$

i własności kongruencji wynika, że

$$(x^p - x) \equiv 0 \mod p$$

oraz

$$(x^{k(p-1)+1} - x) \equiv 0 \mod p,$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. Wielomiany te możemy mnożyć przez x w dowolnej potędze lub dodawać do współczynników dowolne krotności p. Oddzielnym przypadkiem jest $p = 2$ (jedyna parzysta liczba pierwsza). Przez liczbę 2 podzielny jest wielomian, który ma parzystą liczbę nieparzystych współczynników.

Wielomiany podzielne przez liczby złożone można tworzyć na różne sposoby. Po pierwsze: jako iloczyny wielomianów podzielnych przez liczby pierwsze. Po drugie: w wielomianie podzielnym przez liczbę pierwszą za argument można podstawić wielomian podzielny przez inną liczbę pierwszą. Kolejny sposób polega na wykorzystaniu twierdzenia Eulera

$$x^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m, \ \textit{jeśli } x \perp m,$$

gdzie φ to funkcja Eulera:

$\varphi =$ *liczba tych liczb ze zbioru* $\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$, *które są względnie pierwsze z m.*

Weźmy $m = p \cdot q$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi. Wtedy

$$\varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1)$$

i dla $x \perp (p \cdot q)$ mamy

$$x^{(p-1)(q-1)+1} \equiv x \mod m.$$

Łatwo wykazać, że ta kongruencja zachodzi również wtedy, gdy x jest podzielne przez p lub q. Zatem wielomian $(x^{\varphi(p \cdot q)+1} - x)$ jest podzielny przez $p \cdot q$ dla dowolnego x.

Powyższe rozumowanie można uogólnić dla dwóch liczb złożonych, gdy x jest podzielne przez jedną z nich, a nie ma żadnego wspólnego czynnika z drugą. Wystarczy w odpowiednich miejscach zamiast $(n-1)$ wstawić $\varphi(n)$, gdzie n jest jednym z czynników. Można wtedy wykazać, że

$$x^{\varphi(mn)+1} \equiv x \mod mn.$$

Okazuje się, że zachodzi także

$$x^{\frac{1}{s}\varphi(n)+1} \equiv x \mod n,$$

gdzie

$$n = m_1 \cdot m_2, \quad m_1 \perp m_2,$$

$$s = \mathrm{NWD}(\varphi(m_1), \varphi(m_2)),$$

NWD – największy wspólny dzielnik, m_1 i m_2 różne od 2.

Osobnego rozpatrzenia wymaga przypadek $n = p^k$, bo tutaj nie można rozłożyć liczby n na czynniki względnie pierwsze, co było warunkiem poprzednich rozważań. Można więc tu użyć tylko pierwszego sposobu, tj. mnożenia wielomianów podzielnych przez liczby pierwsze będące czynnikami potęgi.

W przypadku liczb złożonych n, oprócz wspomnianych na początku iloczynów wielomianów, mamy zbiór „podstawowych" wielomianów podzielnych przez n:

$$\{x^{\frac{r}{s}\varphi(n)+1} - x\},$$

gdzie r jest dowolną liczbą naturalną, natomiast

$$s = \mathrm{NWD}(\varphi(m_1), \varphi(m_2)),$$

$$n = m_1 \cdot m_2, \quad m_1 \perp m_2.$$

Oczywiście, te wielomiany można mnożyć przez x w dowolnej potędze oraz dokonywać „przesuwania" współczynników o dowolną wielokrotność n.

Jest kilka sposobów tworzenia wielomianów wielu zmiennych z ukrytą podzielnością. Najprostszy sposób to utworzenie wielomianu jednej zmiennej z ukrytą podzielnością i podstawienie dowolnego wielomianu wielu zmiennych za tę zmienną. Następny sposób to pomnożenie wielomianu jednej zmiennej z ukrytą podzielnością przez dowolne wielomiany jednej albo wielu zmiennych.

Innym sposobem jest następujące wykorzystanie Małego Twierdzenia Fermata. Weźmy liczby całkowite x, y oraz z. Albo któraś z nich dzieli się przez p i wówczas iloczyn xyz jest podzielny przez p, albo żadna nie jest podzielna przez p i wtedy

$$x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv z^{p-1} \equiv 1 \mod p,$$

tzn. o każdej z liczb x, y, z w potędze $p-1$ możemy myśleć jak o liczbie 1. Stąd łatwo zobaczyć, że np. dla $p = 13$ podzielny przez p będzie następujący wielomian:

$$xyz(x^{12} + y^{12} + 2z^{12} - 4) =$$
$$= x^{13}yz + xy^{13}z + 2xyz^{13} - 4xyz.$$

Czytelnik łatwo może skonstruować w podobny sposób wielomiany wielu zmiennych podzielne przez inne liczby pierwsze p.

Robert OBRYK – **WYRÓŻNIENIE**