mała delta

Czy tylko $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną?

O istnieniu liczb niewymiernych wiedzieli greccy matematycy ponad 2500 lat temu. Euklides udowodnił w „Elementach”, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna, choć Pitagorejczycy wiedzieli o tym i wcześniej. I może temu dowodowi Euklidesa zawdzięczamy to, że kiedy trzeba wykazać, że jakaś liczba jest niewymierna, wybiera się w tym celu właśnie $\sqrt{2}$. A tymczasem można elementarnie udowodnić niewymierność wielu innych liczb. Podstawą będzie następujące twierdzenie:

jeśli a i n są dodatnimi liczbami całkowitymi i $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą wymierną, to $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą całkowitą.

Dowód twierdzenia jest prosty. Załóżmy, że $\sqrt[n]{a}$ jest liczbą wymierną, a więc $\sqrt[n]{a} = \frac{l}{m}$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich l i m; możemy założyć, że $\frac{l}{m}$ jest ułamkiem nieskracalnym. Wtedy $m^n a = l^n$. Jeśli $m \neq 1$, to istnieje liczba pierwsza p, która dzieli m. Łatwo zauważyć, że wtedy p dzieli także l^n, a więc dzieli także l, co oznacza, że ułamek $\frac{l}{m}$ można skrócić przez $p > 1$ – wbrew założeniu. Ta sprzeczność wykazuje, że musi być prawdziwa równość $m = 1$, a więc $\frac{l}{m}$ jest liczbą całkowitą.

Korzystając z tego twierdzenia, możemy teraz bez trudu wykazać, że

dla każdej liczby pierwszej p i dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, liczba $\sqrt[n]{p}$ jest liczbą niewymierną.

Przypuśćmy, że jest inaczej. Jeśli jednak $\sqrt[n]{p} = a$ i a jest liczbą wymierną, to musi być – zgodnie z twierdzeniem – liczbą całkowitą. Wtedy $p = a^n$, co przeczy założeniu, że p jest pierwsza (bo $a > 1$). Stąd wniosek, że $\sqrt[n]{p}$ nie jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie zadania F 613.
Minimalny rozmiar kątowy, rozróżnialny ludzkim okiem, to $\alpha = h/L \approx 10^{-3}$ (można to sprawdzić samemu, z odległości paru metrów jesteśmy w stanie rozróżnić obiekty rozmiarów milimetrowych). Przyjmując, że długość ogniskowej oka ma 2 cm (rozmiar gałki ocznej!), otrzymujemy $\alpha = h/L \sim x/F$, $x \sim F\alpha \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m.

Nieco więcej zachodu wymaga wykazanie, że

dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n > 1$ liczba $\sqrt[n]{n}$ jest niewymierna.

Jak wynika z twierdzenia, jeśli $\sqrt[n]{n} = a$ i a jest liczbą wymierną, to a jest liczbą całkowitą i $n = a^n$. Oczywiście gdyby $a = 1$, to $n = 1$ – wbrew założeniu. Zatem $a \geqslant 2$, a w konsekwencji $a^n \geqslant 2^n$. Można jednak wykazać (do czego zachęcam tych, którzy znają metodę indukcji matematycznej), że

$2^n > n$ dla każdej liczby naturalnej n,

a więc także dla $a \geqslant 2$ mamy $a^n > n$ i równość $n = a^n$ nie jest możliwa. Znów wnioskujemy, że $\sqrt[n]{n}$ liczbą wymierną nie jest.

Zapraszam Czytelników do samodzielnego wykazania, że

jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to $\sqrt{pq}$ i $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ są liczbami niewymiernymi,

podobnie jak $\sqrt{n(n+1)}$ i $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej.

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL