



### Rozwiązanie zadania M 1051.

Założmy, że suma wszystkich  $n$  liczb jest większa niż 3. Istnieje taki podział tych liczb, że suma liczb w jednej z grup jest z przedziału  $(1, 2]$ . W takim razie, suma liczb w drugiej grupie musi być większa niż 1, co jest sprzeczne z założeniem zadania. Zatem  $M_n \leq 3$ . Konfiguracje dowolnie bliskie liczbie 3 otrzymujemy dla trzech liczb bliskich 1 i pozostałych bliskich 0:  
 $(1 - c, 1 - c, 1 - c, \frac{c}{n-3}, \frac{c}{n-3}, \dots, \frac{c}{n-3})$ ,  
 gdzie  $c \approx 0$ .



### Rozwiązanie zadania M 1052.

Rozważmy równanie kwadratowe

$$x^2 - tx + 1 = 0.$$

Jego pierwiastkami są

$$\alpha = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} \quad \text{i} \quad \beta = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4}}{2},$$

więc  $w_n(t) = \alpha^n + \beta^n$ . Wobec tego  $w_m(w_n(t))$  jest równe sumie  $m$ -tych potęg pierwiastków równania

$$x^2 - (\alpha^n + \beta^n)x + 1 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są, jak łatwo sprawdzić (odnotujmy, że  $\alpha\beta = 1$ ),  $\alpha^n$  i  $\beta^n$ . Zatem

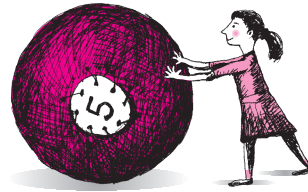
$$\begin{aligned} w_m(w_n(t)) &= (\alpha^n)^m + (\beta^n)^m = \\ &= w_{mn}(t) = w_n(w_m(t)). \end{aligned}$$

## Patrz w niebo

Pogląd, że w centrum większości galaktyk znajduje się supermasywna czarna dziura, jest już dobrze ugruntowany. W kilkudziesięciu przypadkach udało się za pomocą Teleskopu Hubble'a wyznaczyć dość dokładnie masy tych czarnych dziur. Mianowicie ruch gwiazd obiegających czarną dziurę podlega tym samym prawom Keplera, co ruch planet wokół Słońca i z pomiaru prędkości gwiazd w pobliżu centrum galaktyki oraz ich odległości od centrum masę ciała centralnego wyznacza się bez trudu. W zasadzie pomiary takie są wykonalne z powierzchni Ziemi, jednak Teleskopem Hubble'a spoza atmosfery można dostrzec gwiazdy położone bardzo blisko centrum danej galaktyki, przez co wyniki obserwacji są nieporównanie dokładniejsze. Znane obecnie masy galaktycznych czarnych dziur zawierają się w granicach od miliona do 2,5 miliarda mas Słońca.

Właśnie dzięki dokładności obserwacji wykryto kilka lat temu dwa ważne fakty. Po pierwsze – czarne dziury występują tylko w galaktykach mających centralne zgęszczenie (*bulge*), a po drugie – masa czarnej dziury ze zdumiewającą dokładnością stanowi 0,2% masy centralnego zgęszczenia, przy czym zupełnie nie jest ważne, czy i jakie galaktyka ma ramiona spiralne, czyli jak rozbudowany jest dysk galaktyki. Wydaje się, że zależność między masą czarnej dziury i masą centralnego zgęszczenia jest spełniona również bez względu na czas i sposób powstania zgęszczenia. Mogło bowiem ono powstać bardzo dawno, gdy cała galaktyka się formowała, ale mogło też powstać w galaktyce już istniejącej, wskutek spadku jej własnego gazu na centrum, co prawdopodobnie zachodzi w galaktykach przegrodzonych. Związek czarnych dziur z centralnymi zgęszczeniami i brak takiego związku z dyskami galaktyk podkreśla, że powstawanie tych dwóch struktur przebiegało bardzo różnymi drogami, co powinno znaleźć odbicie w pracach teoretycznych.

Tomasz KWAST



## Luty

Mamy środek zimy, a więc na wieczornym niebie najwspanialej prezentuje się Orion. Przez zenit przechodzi Droga Mleczna z niezliczonymi gromadami otwartymi. Są to zgrupowania gwiazd zdecydowanie wyróżniające się z tła, ale w których gwiazdy nie zlewają się w jedną plamę. W pobliżu Oriona, poza Drogą Mleczną, widzimy zgrupowanie gwiazd, które na oko trudno uznać za gromadę, raczej ma się wrażenie, że jest tam po prostu trochę więcej gwiazd. A jednak jest to gromada, Hiady. Stanowi ją niemal setka gwiazd rozrzuconych na obszarze o średnicy  $20^\circ$  w przybliżeniu wokół Aldebarana (który sam do gromady nie należy), najjaśniejszej gwiazdy Byka. Hiady leżą w odległości 41 pc, czyli dostatecznie blisko, by odległość dało się wyznaczyć za pomocą paralaksy

rocznej, i zarazem dostatecznie daleko, by można było na niej testować fotometryczne metody wyznaczania odległości znacznie większych. Dlatego do dziś wielu obserwatorów wyznacza odległości gwiazd Hiad na rozmaite sposoby, a gwiazdy Hiad stały się niemal wzorcami odległości.

Wenus jest w Rybach i zachodzi wkrótce po zachodzie Słońca. Mars jest w Baranie i zachodzi dopiero koło północy. Saturn jest w Byku i widać go niemal do rana, a Jowisz w Lwie, przez co widać go przez całą noc. 26 II Księżyc zakryje Marsa, ale zjawisko to będzie widoczne tylko na południowym Pacyfiku. Pełnia Księżyca wypada 6 II, a now 20 II.

T. K.



### Rozwiązanie zadania M 1053.

Niech  $t$  będzie liczbą całkowitą i niech  $\alpha, \beta$  będą pierwiastkami równania  $x^2 - tx + 1 = 0$ . Mamy

$$t^n - w_n(t) = (\alpha + \beta)^n - \alpha^n - \beta^n = \binom{n}{1} \alpha^{n-1} \beta + \binom{n}{2} \alpha^{n-2} \beta^2 + \dots$$

$$\dots + \binom{n}{n-1} \alpha \beta^{n-1} = \binom{n}{1} (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) + \binom{n}{2} (\alpha^{n-4} + \beta^{n-4}) + \dots = \binom{n}{1} w_{n-2}(t) + \binom{n}{2} w_{n-4}(t) + \dots$$

Zatem, na mocy indukcji, jeśli  $t$  jest liczbą całkowitą, to  $w_n(t)$  też. Jeśli  $n$  jest liczbą nieparzystą, to łatwo zauważyć, że  $2^n w_n(t)$  jest podzielne przez  $t$ . Zatem, jeśli  $p > 2$ , to  $p | 2^p w_p(p)$ , skąd  $p | w_p(p)$ . Dla  $p = 2$  tęzę sprawdzamy bezpośrednio.