Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2004

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań **463** ($WT = 2{,}39$) i **464** ($WT = 1{,}35$)
z numeru 6/2003

Michał Adamaszek	– 2 - 44,76
Paweł Najman	– 41,07
Marian Łupieżowiec	– 37,40
Paweł Kubit	– 2 - 37,34
Piotr Kumor	– 7 - 36,84
Michał Jóźwikowski	– 36,70
Zbigniew Sewartowski	– 36,07
Nikodem Szpak	– 33,42
Marcin Kasperski	– 2 - 33,10
Krzysztof Jasek	– 32,63
Światosław Gal	– 30,94
Andrzej Daniluk	– 1 - 30,82
Witold Bednarek	– 2 - 28,86
Bartłomiej Dyda	– 3 - 28,47
Janusz Olszewski	– 6 - 26,96
Paweł Walter	– 26,78
Marek Prauza	– 3 - 26,07
Lech Duraj	– 25,00
Jerzy Cisło	– 2 - 24,93
Leszek Grzanka	– 23,62
Jerzy Witkowski	– 3 - 22,63
Jan Czardybon	– 21,83
Tomasz Rawlik	– 5 - 20,05
Maciej Mostowski	– 1 - 20,04

Legenda (przykładowo): stan konta 7–36,84 oznacza, że uczestnik już siedmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (ósmej) rundzie ma 36,84 punktów.

Listę otwiera **Michał Adamaszek**, który przekracza próg 44 po raz trzeci i zostaje dwudziestym piątym Weteranem Klubu 44 M.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2001, 2002 lub 2003.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 475, 476

Redaguje Marcin E. KUCZMA

475. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nie wszystkie równe zeru. Wykazać, że równanie $\sqrt{1+a_1x} + \sqrt{1+a_2x} + \ldots + \sqrt{1+a_nx} = n$ (z niewiadomą x) ma nie więcej niż dwa pierwiastki rzeczywiste.

476. Niech $A_1, A_2, A_3, \ldots$ będzie nieskończonym ciągiem zbiorów czteroelementowych, z których żadne dwa nie są rozłączne. Udowodnić, że można znaleźć takie trzy elementy a, b, c, aby każdy ze zbiorów A_i zawierał co najmniej jeden z tych trzech elementów.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2003

Przypominamy treść zadań:

467. Czy istnieje wielomian $P(x,y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych, o współczynnikach rzeczywistych, którego zbiór wartości pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb dodatnich?

468. W niemalejącym ciągu a_1, a_2, a_3, ... o wyrazach naturalnych każda liczba naturalna k występuje dokładnie k razy. Podać wzór jawny, przedstawiający n-ty wyraz a_n jako funkcję zmiennej n, wyrażającą się przez działania arytmetyczne, potęgi/pierwiastki oraz symbol $\lfloor x \rfloor$.

467. Istnieją takie wielomiany. Przykład: $P(x,y) = x^2 + (1-xy)^2$. Ten wielomian przyjmuje tylko wartości dodatnie (bo liczby x oraz $1-xy$ nie mogą być jednocześnie zerami). Z tożsamości $P(x, 1/x) = x^2$ wynika zaś, że każda liczba dodatnia należy do zbioru wartości.

468. Wyraz o wartości k występuje po raz ostatni na miejscu o numerze $1+2+\ldots+k$, czyli $\frac{1}{2}k(k+1)$. Stąd wniosek, że warunki

$$a_n = k \tag{1}$$

oraz

$$\tfrac{1}{2}(k-1)k < n \leqslant \tfrac{1}{2}k(k+1) \tag{2}$$

są równoważne. Dla liczb naturalnych k, n warunek (2) jest równoważny warunkowi

$$\tfrac{1}{2}(k-1)k < n - \tfrac{1}{8} < \tfrac{1}{2}k(k+1),$$

który przekształcamy algebraicznie do kolejnych równoważnych postaci:

$$k^2 - k + \tfrac{1}{4} < 2n < k^2 + k + \tfrac{1}{4}\,,$$

$$k - \tfrac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \tfrac{1}{2}\,,$$

$$k = \lfloor \tfrac{1}{2} + \sqrt{2n} \rfloor. \tag{3}$$

Równoważność (1) $\iff$ (3) daje żądany wzór: $a_n = \lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{2n} \rfloor$.

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (5), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (7), P. Gadziński (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (6), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (6), T. Józefczyk, J. Witkowski, W. Bednorz, B. Dyda, M. Peczarski, M. Adamaszek (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie): „dwukrotni": Z. Bartold, W. Bednarek, J. Cisło, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, P. Kubit, D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;
„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Daniluk, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Dwa lata temu, w omówieniu zamykającym dwudziesty sezon ligowy, świętowaliśmy jubileusz; przyjęło się bowiem uważać liczby zakończone zerami za bardziej odświętne od innych. Ale – skoro nasza liga ma w nagłówku *Klub* 44, to może lepszą rację bytu powinna mieć u nas arytmetyka, w której „dobre przystawanie” do 44 dodaje liczbie splendoru? Podzielność przez 2 i 11 zamiast 2 i 5? Zakończony właśnie sezon o numerze 22 jest znakomitą okazją do kolejnego jubileuszu. Jeszcze drugie tyle i będziemy obchodzić czterdzieste czwarte imienino-urodziny…

Przez te lata przewinęło się przez ligę sześć i pół setki uczestników. Mało komu starczyło cierpliwości, aby tej rozrywce pozostać wiernym dłużej niż kilka lat. Wszelako jeden z zawodników zadziwił wytrwałością: pan **Witold Bednarek**, który rozpoczął udział już w pierwszym miesiącu życia ligi i do dziś dnia (choć z paruletnimi przerwami) aktywnie uczestniczy, przysyłając eleganckie rozwiązania oraz liczne ciekawe propozycje zadań. Serdeczne gratulacje!

Jeszcze jedno nazwisko koniecznie trzeba tu wymienić: pan **Jerzy Janowicz**, uczestnicząc w lidze prawie nieprzerwanie przez jej pierwszych dwanaście lat, zdołał przekroczyć magiczny próg 44 punktów osiem razy, jako jedyny z zawodników. Serdeczne gratulacje!

Ten rekord czeka na wyrównanie, może i pobicie. To zachęta dla innych uczestników, wśród których widzimy dwóch mających na koncie siedem okrążeń oraz dwóch z sześcioma – wciąż aktywnych w udziale.

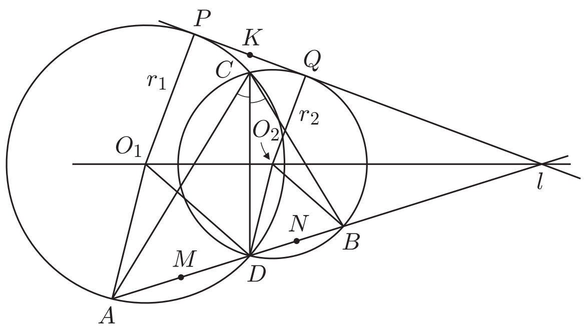
W naszej lidze punkty gromadzi się wytrwale i nieśpiesznie; takie jest jej założenie. Jeśli jednak ktoś pragnie uczestniczyć intensywnie, to czemu nie? Okazuje się, że jest wykonalne uzbieranie 44 punktów w ciągu jednego roku, za bezbłędne rozwiązania wszystkich zadań z jedenastu kolejnych numerów; mowa tu o okresie po roku 1984, bo wcześniej, gdy w numerze były trzy zadania z matematyki, konta rosły szybciej. Ale od początku roku 1985 niezbędne minimum czasowe jest wyznaczone właśnie przez rozwiązania z 11 numerów.

Ta sztuka udała się trzem uczestnikom; oto ich nazwiska (w kolejności chronologicznej): **Piotr Jędrzejewicz**, **Henryk Kasprzak** oraz dwukrotnie **Przemysław Gadziński**. I jeszcze nazwiska tych, którym to zajęło o jeden miesiąc więcej: **M. Gałecki**, ponownie **P. Jędrzejewicz**, **M. Mazur**, ponownie **H. Kasprzak**, **J. Witkowski**, **M. Peczarski**, **J. Cisło**. Serdeczne gratulacje!

Dość na dzisiaj wspominania rekordów. Liczymy na udział w *Lidze* nowych Czytelników; zapraszamy do zabawy.

Przechodzimy do omówienia wybranych zadań; przedstawiamy rozwiązania ciekawsze od „firmowych” oraz odnotowujemy te zadania, które zostały poprawnie rozwiązane przez nielicznych uczestników.

Zadanie **447**. [$\triangle ABC$; CD – dwusieczna; prosta ℓ styczna do okręgów (ACD), (BCD) w punktach P, Q; K, M, N – środki odcinków PQ, AD, $BD \Rightarrow$ $\Rightarrow \ell$ – styczna do okręgu (KMN)] (współczynnik trudności WT=2,87; liczba poprawnych rozwiązań LPR=5). Wszystkie otrzymane rozwiązania były odmienne od firmowego. **J. Cisło**, **J. Olszewski** i **T. Rawlik** zgrabnie operują pojęciem jednokładności: oznaczając przez O_1, r_1 oraz O_2, r_2 odpowiednio środki i promienie okręgów (ACD), (BCD) wnosimy z równości $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle BCD|$, że trójkąt AO_1D jest podobny do DO_2B w skali r_1/r_2; stąd nietrudny wniosek, że pierwszy z tych trójkątów jest obrazem drugiego w jednokładności, która przeprowadza okrąg (QDB) na (PAD) (przypadek, gdy $r_1 = r_2$, wymaga oddzielnego rozpatrzenia). Jednokładność o tym samym środku i skali $(r_1 + r_2)/2r_2$ przeprowadzi okrąg (QDB) na (KMN); pierwszy z nich jest styczny do ℓ, więc drugi też.
Pozostałe dwa dobre rozwiązania (**T. Wietecha**, **P. Najman**) bardziej rachunkowe, z użyciem trygonometrii.



Zadanie **449**. [$x, y, z \in \mathbb{R}$; $y = x^2 - 2$, $z = y^2 - 2$, $x = z^2 - 2 \Rightarrow x + y + z = ?$] ($WT$=1,58; LPR=16). Skoro przed chwilą padło słowo *trygonometria*, warto nadmienić, że i w tym zadaniu może ona być użyteczna. Łatwo zauważyć, że liczby x, y, z muszą leżeć w przedziale $\langle -2; 2\rangle$, przyjmijmy więc $x = 2\cos\alpha$, $\alpha \in \langle 0; \pi\rangle$; wówczas $y = 2\cos 2\alpha$, $z = 2\cos 4\alpha$, $x = 2\cos 8\alpha$. Rozwiązując równanie $\cos 8\alpha = \cos\alpha$ stwierdzamy, że α należy do sumy zbiorów

$A = \{\frac{2}{7}k\pi\colon\ k = 1, 2, 3\}$,

$B = \{\frac{2}{9}k\pi\colon\ k = 1, 2, 4\}$,

$C = \{\frac{2}{3}\pi\}$,

$D = \{0\}$.

Wartość sumy $x + y + z$ wynosi (odpowiednio) -1, 0, -3, 6. Taką metodą rozwiązali to zadanie **K. Kulewski**, **P. Kumor**, **P. Kubit**, **M. Adamaszek**.

Zadanie **450**. [Dane $n, m \in \mathbb{N}$; $n, m > 1$; $Z(k)$ – to zdanie:

$$\exists\, x_1, \ldots, x_k, y \in \mathbb{N}\colon\ x_i < x_{i+1},\ \sum x_i^n = y^n;$$

$Z(k)$ zachodzi dla $k = m, \ldots, 2m-2 \Rightarrow Z(k)$ zachodzi dla wszystkich $k \geqslant m$] (WT=3,00; LPR=6). Poprawne rozwiązania (**M. Adamaszek**, **J. Cisło**, **P. Kumor**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**, **T. Rawlik**) identyczne, jak firmowe (które zaproponował autor zadania, **W. Bednarek**).

Zadanie **452**. [Dane $a, b, c > 0$; koło o średnicy d mieści się w prostopadłościanie $a \times b \times c$; max $d = ?$] (WT=3,48; LPR=2). To zadanie okazało się najtrudniejsze – w omawianym sezonie, a także od paru lat. Wyższy współczynnik trudności miało – jako ostatnie – zadanie **363** z numeru 6/1998 (WT=3,51; też geometria przestrzenna). Poprawne rozwiązania przedstawili **P. Kumor** oraz (z drobną luką) **J. Cisło**. Nie różnią się one w sposób istotny od rozwiązania firmowego ani od rozwiązania podanego przez autora zadania, którym był **Adam Woryna**.

Zadanie **454**. [Znaleźć stałą C o własności: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a_1, \ldots, a_n > 0$:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1 + \ldots + a_n} \leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right);$$

im mniejsza stała C, tym wyższa ocena] (WT=2,50; LPR=8). Ilekroć uczestnicy *Ligi* udzielają nam lekcji, jak powinno wyglądać fachowe rozwiązanie zadania, czy wręcz jego sformułowanie, jest to dla nas moment niemałej radości. Tak było i tym razem. Więc po kolei: zadanie zaproponował **Paweł Kubit**, ze stałą $C = 4$, nie podając (wówczas) dowodu. Redaktor *Ligi* poczuł się dumny, że potrafi tę nierówność udowodnić ze stałą $C = \mathrm{e}$ (rozwiązanie firmowe). Uzyskiwane w tym dowodzie nierówności nie mogą jednocześnie zbliżyć się do równości, więc nie jest to stała optymalna; stąd takie nieco zagadkowe sformułowanie treści zadania; a w tle – domniemanie redaktora, że znalezienie optymalnej stałej może być trudne, że może wręcz nie wyraża się ona elementarnie. . . ?

Wkrótce zaczęły nadchodzić listy z rozwiązaniami i dowiedzieliśmy się, jak to jest: nierówność zachodzi ze stałą $C = 2$, która jest optymalna. Tę właśnie stałą znaleźli *wszyscy* rozwiązujący (wśród nich także autor zadania), w większości podając też dowód optymalności; oto rozumowanie przedstawione w kilku pracach:

W nierówności Cauchy'ego–Schwarza

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

(sumowanie po $i = 1, \ldots, k$) podstawiamy

$$x_i = \sqrt{a_i}, \qquad y_i = \frac{i}{\sqrt{a_i}},$$

otrzymując

$$b_k := \frac{k}{a_1 + \ldots + a_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i};$$

sumowanie po $k = 1, \ldots, n$ daje nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i},$$

gdzie

$$c_i = 4i^2 \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} < 4i^2 \sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(k+1)^2}\right) < 2,$$

i mamy tezę zadania dla $C = 2$. Uzasadnienie optymalności nietrudno uzyskać rozważając ciąg $a_i = i$.

Zadanie **456**. [Czy istnieją liczby niewymierne $\alpha, \beta > 1$ takie, że $\forall m, n \in \mathbb{N}$: $\lfloor \alpha^m \rfloor \neq \lfloor \beta^n \rfloor$?] (WT=2,97; LPR=7). **W. Bednarek**, **J. Cisło**, **A. Daniluk**, **P. Kubit**, **P. Kumor**, **J. Olszewski** znajdują przykłady w postaci wymiernych kombinacji liczb 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$. **Bartłomiej Dyda** podaje ciekawe uogólnienie: dla każdej liczby niewymiernej $\alpha \geqslant 3$ istnieje liczba β o wymaganej własności. Wystarczy w tym celu rozważyć zbiór

$$A = \bigcup_{m>n>1} I_{mn},$$

gdzie

$$I_{mn} = \langle (\alpha^m - 1)^{1/n}; (\alpha^m + 1)^{1/n} \rangle.$$

Miarę (długość) przedziału I_{mn} można oszacować korzystając z twierdzenia o wartości średniej oraz z warunków $\alpha \geqslant 3$, $n \geqslant 2$:

$$\mu(I_{mn}) < \tfrac{2}{n}(\alpha^m - 1)^{\frac{1}{n}-1} < \tfrac{2}{n}\left(\tfrac{1}{2}\alpha^m\right)^{\frac{1}{n}-1} < 2\alpha^{-\frac{m}{2}},$$

czyli

$$\mu(I_{mn}) < 2\gamma^m,$$

gdzie

$$\gamma = \alpha^{-1/2} \leqslant \tfrac{1}{3}\sqrt{3};$$

stąd oszacowanie miary zbioru A:

$$\mu(A) < 2\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} \gamma^m = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma^{n+1}}{1-\gamma} = \frac{2\gamma^3}{(1-\gamma)^2} < 4.$$

Przedział $J = (\alpha + 1; \alpha^2 - 1)$ ma długość

$$\alpha^2 - \alpha - 2 \geqslant 4,$$

więc można znaleźć liczbę niewymierną $\beta \in J \setminus A$; gdyby dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodziła równość $\lfloor \alpha^m \rfloor = \lfloor \beta^n \rfloor$, wówczas mielibyśmy

$$m > n > 1 \quad (\text{bo } \beta \in J) \quad \text{oraz} \quad \alpha^m - 1 < \beta^n < \alpha^m + 1,$$

czyli $\beta \in I_{mn} \subset A$; sprzeczność.

Zadanie **460**. [$x_1, \ldots, x_n \in \langle 0; \pi/4 \rangle \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; \sqrt[n]{(\operatorname{tg} x_1)\ldots(\operatorname{tg} x_n)} \leqslant \sqrt{\frac{\sin^2 x_1 + \ldots + \sin^2 x_n}{\cos^2 x_1 + \ldots + \cos^2 x_n}}$] (WT=1,86; LPR=14). To chyba najbardziej spektakularna wpadka od początku istnienia *Ligi*! Zadanie pochodzi z dosyć starych remanentów – zaproponował je **Lesław Skrzypek** z dziesięć lat temu. Nie byłoby w tym nic złego, gdyby nie taki drobiazg, że zostało ono już wykorzystane w *Lidze*, jako zadanie **292** w numerze 12/1994; redaktor *Ligi* zaniedbał wówczas jedynie zanotować ten fakt – a teraz się ucieszył, że ma w zanadrzu taką ładną nierówność, i zadanie „poszło" po raz drugi! Zwrócił na to uwagę jeden z czytelników. Ciekawe, ilu uczestników spośród tych, którzy rozwiązali to zadanie i wtedy, i teraz, miało świadomość powtórnego wykonywania roboty? . . .

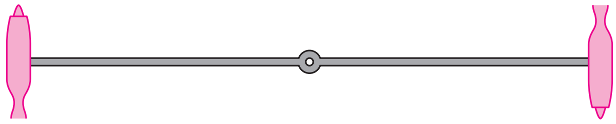
Tym zabawnym akcentem kończymy owówienie dwudziestego drugiego jubileuszowego sezonu *Ligi*.

Zadania z fizyki nr 372, 373

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2004

372. Wirnik pewnego silnika jest napędzany silnikami odrzutowymi umieszczonymi na końcach prętów promieniowych („szprych”), wzdłuż których biegną przewody doprowadzające paliwo poprzez oś wirnika.



Ktoś twierdzi, że moc zespołu (odprowadzana w osi, tzn. wirnik obraca jakieś urządzenie) jest proporcjonalna do prędkości kątowej wirnika ω, gdyż obliczamy ją mnożąc siłę odrzutu (zależną tylko od tempa zużycia paliwa i prędkości wylotu gazów, ale nie od ω) przez prędkość silników. Zatem dla dowolnie dużych ω otrzymalibyśmy dowolnie dużą moc, co wobec ustalonego tempa zużycia paliwa wydaje się sprzeczne z zasadą zachowania energii. Wskazać błąd w tym rozumowaniu i obliczyć maksymalną moc zespołu. Dane: długość szprych $r = 5$ m, tempo zużycia paliwa przez silniki $\psi = 0{,}5$ kg/s, stosunek masy wyrzucanych gazów do masy paliwa $k = 5$ (pozostała masa to pobierane powietrze), prędkość wylotowa gazów względem silnika $v = 1600$ m/s. Przy jakiej prędkości kątowej wirnika ω osiągana jest maksymalna moc?

373. Po przejściu przez pewien filtr światło białe uzyskuje barwę zieloną. Gdy jednak przepuścić światło białe kolejno przez dużą liczbę takich filtrów, przechodzące światło okazuje się czerwone (jego natężenie jest wtedy bardzo małe). Jak to możliwe?

Rozwiązanie zadania F 614.
Siła wyporu, działająca na balonik, wynosi

$$F_{\mathrm{w}} = pV\mu g/RT_0,$$

gdzie T_0 – temperatura otaczającego powietrza. Masa nagrzanego do temperatury T powietrza to $m = pV\mu/RT$. Zatem jeśli M to masa celofanowej powłoki, to warunek unoszenia się balonika jest następujący:

$$F_{\mathrm{w}} \geqslant (M+m)g$$

i stąd

$$T \geqslant \frac{T_0}{1 - MRT_0/pV\mu}.$$

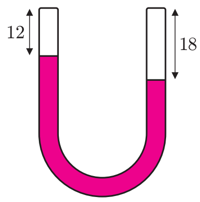
Dla $M \approx 5$ g, promienia balonika $2r \approx 35$ cm, $T_0 \approx 300$ K i $p \approx 10^5$ Pa otrzymujemy, że temperatura krytyczna wynosi $T_{\mathrm{kr}} \approx 500$ K $\approx 200°$ C.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2003

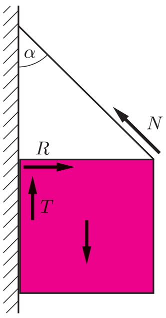
Przypominamy treść zadań:

364. Jednorodny sześcian wisi na nici, dotykając ściany (rys. 2). Nić tworzy ze ścianą kąt α. Jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia statycznego sześcianu o ścianę, aby było to możliwe?

365. Rurka o kształcie litery U o obu końcach zatopionych zawiera rtęć oraz dwie objętości gazu (rys. 1). W pozycji pionowej (gdy gaz był na górze), długości słupów gazu wynosiły 12 cm i 18 cm. Gdy rurkę odwrócono o 180° bez zmiany temperatury, długość pierwszego słupa gazu spadła do 6 cm, przy czym słup rtęci nie uległ przerwaniu.
a) Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurkę położyć poziomo, a temperatura pozostanie niezmieniona?
b) Ile wyniosą długości słupów gazu, jeśli rurka pozostanie w pozycji wyjściowej, a temperatura wzrośnie z początkowej wartości 20° C do 80° C?



Rys. 1



Rys. 2

364. Oznaczmy siłę napięcia nici przez N, siłę tarcia przez T, a siłę reakcji ściany (tzn. jej składową poziomą) przez R. Warunek równowagi poziomych składowych sił ma postać

$$R = N\sin\alpha.$$

Aby sformułować warunek równowagi ze względu na obroty, trzeba wskazać punkt przyłożenia siły R. W ogólności jest ona rozłożona wzdłuż całej powierzchni styku ze ścianą, ale na granicy równowagi („tuż przed” ześlizgnięciem się sześcianu) będzie ona przyłożona na górnym brzegu tej powierzchni. Rozpatrując momenty sił względem środka górnej powierzchni sześcianu znajdujemy drugi warunek równowagi

$$T = N\cos\alpha.$$

Zatem minimalna wartość współczynnika tarcia jest równa $\operatorname{ctg}\alpha$.

365. a) Oznaczmy dane długości słupów gazu przez

$$L_1 = 12 \text{ cm}, \quad L_2 = 18 \text{ cm}, \quad L_1' = 6 \text{ cm}.$$

Łączna długość słupa rtęci (a więc i gazu) pozostaje niezmieniona, zatem po odwróceniu rurki długość drugiego słupa gazu wzrośnie do $L_2' = 24$ cm. Zgodnie z równaniem gazu doskonałego

$$p_1L_1S = p_1'L_1'S = n_1RT,$$

$$p_2L_2S = p_2'L_2'S = n_2RT,$$

gdzie S – powierzchnia przekroju rurki, a n_1 i n_2 są odpowiednimi liczbami moli gazu. Zatem

$$p_1/p_1' = L_1'/L_1 = 1/2,$$

$$p_2/p_2' = L_2'/L_2 = 4/3.$$

Różnica ciśnień gazu jest równa ciśnieniu słupa rtęci, czyli

$$p_2 - p_1 = \rho g(L_2 - L_1) = 6 \text{ cm Hg},$$

$$p_1' - p_2' = \rho g(L_2' - L_1') = 18 \text{ cm Hg}.$$

Rozwiązaniem układu czterech powyższych równań jest

$$p_1 = 18 \text{ cm Hg}, \quad p_2 = 24 \text{ cm Hg},$$

$$p_1' = 36 \text{ cm Hg}, \quad p_2' = 18 \text{ cm Hg}.$$

Dalej znajdujemy stosunek liczb moli

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1 L_1}{p_2 L_2} = \frac{1}{2}.$$

W poziomym położeniu rurki ciśnienia obu objętości gazu są jednakowe, a stąd stosunek długości L_1'' i L_2'' jest równy stosunkowi liczb moli. Obliczamy

$$L_1'' = 10 \text{ cm}, \quad L_2'' = 20 \text{ cm}.$$

b) Oznaczmy zmienioną temperaturę przez T, a długości słupów gazu przez L_1 i L_2. Warunkiem równowagi jest

$$\frac{n_2 R T}{L_2 S} - \frac{n_1 R T}{L_1 S} = (L_2 - L_1)\rho g.$$

Po podstawieniu n_1 i n_2 z poprzednich równań otrzymujemy

$$\frac{T}{T}\left(\frac{423 \text{ cm}^2}{L_2} - \frac{216 \text{ cm}^2}{L_1}\right) = L_2 - L_1.$$

Ponadto, oczywiście,

$$L_1 + L_2 = 30 \text{ cm},$$

co daje równanie trzeciego stopnia. Rozwiązując je numerycznie dochodzimy do wyniku

$$L_1 = 11{,}77 \text{ cm}, \quad L_2 = 18{,}23 \text{ cm}.$$

Rozszerzona czołówka
ligi zadaniowej **Klub 44F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
356 ($WT = 2{,}00$), **357** ($WT = 1{,}00$),
358 ($WT = 1{,}00$), **359** ($WT = 1{,}45$),
360 ($WT = 1{,}00$) i **361** ($WT = 1{,}30$)
z numerów 4/2003, 5/2003 i 6/2003.

Tomasz Rudny	Warszawa	–	29,50
Marian Łupieżowiec	Zebrzydowice	–	20,09
Michał Jóźwikowski	Błonie	–	14,77
Jacek Piotrowski	Rzeszów	– 1 -	12,45
Leszek Grzanka	Chechło	–	12,38
Piotr Kumor	Olsztyn	–	9,44
Przemysław Gadziński	Środa Śląska	– 1 -	8,61
Tomasz Wietecha	Tarnów	– 5 -	8,06
Kazimierz Gryszko	Gliwice	–	7,93
Andrzej Idzik	Bolesławiec	– 5 -	7,91

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2001–2003 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani **Klubu 44 F**
(w kolejności uzyskiwania
statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (5), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie **Klubu 44F**
(alfabetycznie):

„dwukrotni”:

J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jednokrotni”:

A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach.

W kilku ostatnich seriach zadań liczba uczestników ligi fizycznej niebezpiecznie się zmniejszyła, co grozi załamaniem się naszej zabawy. Gorąco zapraszam wszystkich Czytelników – zarówno początkujących, jak i starych wyjadaczy – do spróbowania swoich sił, a także do przysyłania oryginalnych zadań własnego pomysłu. Nasza lista czołówki ligowej czeka na Wasze nazwiska!

Przedstawmy omówienie wybranych zadań z ostatniego rocznika *Delty.*

Zadanie **347**. [Jak rozlać herbatę do dwóch kubków, żeby ją najlepiej ochłodzić?] (współczynnik trudności WT=3,16, liczba poprawnych rozwiązań LPR=1). Pan T. Wietecha dokonał znacznie głębszej analizy problemu, niż zostało to zrobione w rozwiązaniu firmowym – m.in. wziął pod uwagę zależność tempa odpływu ciepła od ilości cieczy w kubku. Skąpe ramy naszego czasopisma nie pozwalają na prezentację otrzymanych wyników (imponujących profesjonalną metodyką!) i możemy tylko z ulgą odnotować zgodność z odpowiedzią podaną w *Delcie*: rzeczywiście lepiej jest przelać do zimnego kubka więcej niż połowę cieczy.

Zadanie **351**. [Dany jest wygląd „zajączka” powstałego przy przejściu światła słonecznego przez szczelinę, obliczyć odległość ekranu od szczeliny.] (WT=3,37, LPR=2). Wartości liczbowe w rozwiązaniu firmowym zawierają pomyłkę – stosunek wymiarów „zajączka” jest równy raczej 1,9, a nie 1,4, stąd i szukana odległość wynosi ponad 7 m, a nie 16 (jak podano). Prawidłowe rozwiązania przysłali tylko A. Idzik i T. Wietecha, więc wartość współczynnika trudności zadania okazała się wysoka. Nieco to zaskakuje, gdyż „na oko” nie wydaje się ono trudniejsze od drugiego zadania z pary, które miało aż 7 dobrych rozwiązań.

Zadanie **352**. [Pręt zawieszony jednym końcem na osi w ruchomym klocku, jaka jest minimalna wartość współczynnika tarcia, aby po odchyleniu pręta do poziomu klocek nie ruszył z miejsca?] (WT=2,35, LPR=3). W końcówce rozwiązania firmowego dał o sobie znać kolejny chochlik – autor pomylił się co do maksimum funkcji. Prawidłowy wynik: $\mu = 9/\sqrt{40} = 1{,}423$, dziękuję kilku Czytelnikom za zwrócenie mi uwagi.

Zadanie **355**. [„Transmutacja” azotu w tlen w otwartym naczyniu] (WT=2,00, LPR=4). Mroczną tragedię na motywach tego zadania, godną specjalnej premii literackiej, przysłał A. Idzik. Pozostałe dobre rozwiązania – D. Lisiakiewicz, A. Nowogrodzki i T. Wietecha (który znalazł je w podręczniku Sz. Szczeniowskiego).

Zadania **360**. [Maksymalna prędkość łodzi] (WT=1,00, LPR=1) i **361** [Odchylenie promienia światła przebiegającego obok Słońca.] (WT=1,30, LPR=1). Oba zadania stały się znów polem do popisu dla p. T. Wietechy, który w zadaniu 360 uwzględnił subtelności wynikające z liczby Reynoldsa, a w zadaniu 361 wyprowadził ścisły wynik, obowiązujący dla dowolnie dużych odchyleń. To ostatnie budzi pewne wątpliwości, gdyż taka ścisłość dla konkretnego przypadku Słońca jest niepotrzebna, a powoduje znaczne utrudnienie problemu. Tak czy inaczej szkoda, że p. Wietecha był jedynym, który wziął się z tymi problemami za bary!