

Bilardy

Henryk ŻOŁĄDEK

Dla zwykłego śmiertelnika bilard kojarzy się ze spędzaniem wolnego czasu i traceniem pieniędzy. Profesjonaliści potrafią na bilardzie zarabiać pieniądze. Natomiast matematykom bilardy dostarczają rozrywek zgoła innego rodzaju.

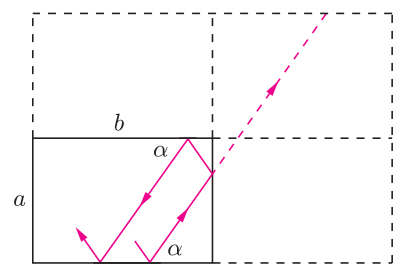
Bilardem będziemy nazywać układ dynamiczny cząstki materialnej poruszającej się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością (równą 1) po (spójnym) **stole bilardowym** $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, którego brzeg składa się ze skończonej liczby kawałków krzywych klasy C^1 . Przy odbiciu od brzegu $\partial\Omega$ kąt padania równa się kąt odbicia. Przestrzeń możliwych stanów cząstki, nazywana **przestrzenią fazową** i oznaczana przez X , to 3-wymiarowa przestrzeń par (x, θ) , gdzie $x \in \Omega$ jest położeniem cząstki, a kąt $\theta \in [0, 2\pi)$ określa kierunek ruchu.

Chyba najprostszym przykładem bilardu jest bilard w prostokącie (o bokach a i b). Jego prostota wynika po części z tego, że kąt α odbicia w przeciwległych ściankach nie zmienia się wzdłuż trajektorii (rysunek obok). Z tego rysunku widać także, że układ dynamiczny bilardu w prostokącie jest równoważny ruchowi wzdłuż geodezyjnych na torusie o wymiarach $2a$ i $2b$. Jeśli współczynnik nachylenia $\tan \alpha$ jest współmierny z b , tzn. $\frac{\tan \alpha}{b/a} = \frac{m}{n}$ (nieskracalny ułamek), to trajektoria jest okresowa z okresem $q = 2(m+n)$. W przeciwnym przypadku ruch jest prawie okresowy, ale nie okresowy.

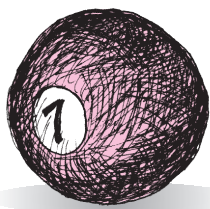
Przestrzeń fazowa X rozbija się na 2-wymiarowe podzbiory niezmiennicze X_α , gdzie każde X_α jest zapełnione rodziną trajektorii okresowych albo jest zapełnione rodziną gęstych obmotek na torusie. W ostatnim przypadku mówimy, że potok bilardu ograniczony do X_α jest **ergodyczny**.

Oczywiście bilard w prostokącie ma nieskończenie wiele trajektorii okresowych; każda taka trajektoria leży w pasie złożonym z trajektorii okresowych o takiej samej geometrii. Dlatego wygodnie jest wprowadzić funkcję $f(N)$, określającą liczbę powyższych pasów trajektorii okresowych o okresie $q \leq N$. W przypadku prostokąta ta liczba zachowuje się jak $\sim cN^2$ przy $N \rightarrow \infty$, gdzie c jest wyliczalną stałą.

Przejdźmy do bilardów w wieloboku ogólnego typu (z n bokami i dowolnymi kątami). Tutaj sytuacja nie jest już tak jasna. W szczególności, nie wiadomo, czy dla każdego wieloboku istnieje chociaż jedna trajektoria okresowa. Jeśli już trajektorie okresowe istnieją, to są one dwóch typów: izolowane, gdy okres jest nieparzysty, i nieizolowane (w pasach), gdy okres jest parzysty. Przy tym trajektorie izolowanych jest bardzo mało.



Okresem trajektorii nazywamy liczbę punktów, w których odbija się od brzegu. Trajektorie, które wpadają w wierzchołki prostokąta (lub obszaru Ω), są bardzo rzadkie i ich nie uwzględniamy.



Ważną klasę wieloboków stanowią tzw.

wieloboki wymierne, których kąty wierzchołkowe są współmierne z π . W takim przypadku można uogólnić powyższą konstrukcję: prostokąt \rightarrow torus. Dostaje się pewną płaską zamkniętą powierzchnię i potok geodezyjny na niej, równoważny potokowi bilardu. Tutaj również z każdą trajektorią bilardu (tzn. geodezyjną) można związać niezmiennik analogiczny do kąta α ,

tzw. **kierunek geodezyjnej**. Mamy znowu rozbięcie przestrzeni fazowej X na niezmiennicze podzbiory X_α . Udowodniono, że dla prawie każdego α ograniczenie potoku do X_α jest ergodyczne. Udało się też pokazać oszacowania $c_* N^2 \leq f(N) \leq c^* N^2$ dla liczby pasów złożonych z trajektorii okresowych o parzystym okresie $q \leq N$ (H. Masur). Przypuszcza się, że w granicy $N \rightarrow \infty$ stałe c_* i c^* pokrywają się.

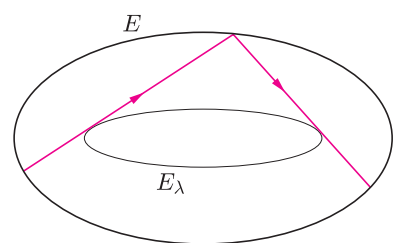
Kolejnym standardowym przykładem jest **bilard w elipsie** E o równaniu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tutaj zachodzi następująca własność. Jeśli trajektoria bilardu jest styczna (w pewnym momencie) do elipsy E_λ o równaniu: $\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1$ współogniskowej z E , to będzie ona styczna do E_λ również po następnych odbiciach (rysunek obok). Wobec tego przestrzeń fazową X można rozbić na odpowiednie niezmiennicze podprzestrzenie X_λ . Można powiedzieć nawet więcej: dla ustalonego λ albo wszystkie trajektorie z X_λ są okresowe z tym samym okresem, albo są równoważne (w pewnym sensie) prawie okresowym obmotkom na torusie. W pierwszym przypadku mamy do czynienia z tzw.

własnością Ponceleta:

jeśli pewien wielokąt jest wpisany w E i opisany na E_λ , to można go poruszać w ciągły sposób, tak aby pozostał wpisany w E i opisany na E_λ .



W istocie, dowód słynnego twierdzenia Ponceleta można sprowadzić do tego twierdzenia.

Jeśli chodzi o istnienie trajektorii okresowych w dowolnym wypukłym bilardzie, to mamy następujące twierdzenie G. D. Birkhoffa.

Dla dowolnych naturalnych liczb względnie pierwszych p i q , takich że $p < q$, istnieją co najmniej dwie trajektorie bilardu o okresie q obiegające brzeg p razy.

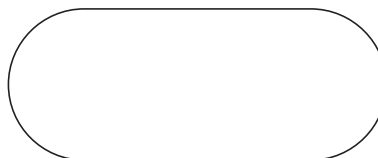
Dowód opiera się na obserwacji, że powyższe trajektorie realizują odpowiednio maksimum i minimum obwodu q -boku wpisanego w Ω o zadanej **liczbie obrotu** $\frac{p}{q}$. Gdy $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, to maksymalna orbita odpowiada średnicy Ω , a minimalna – szerokości Ω .

Innym intrygującym problemem jest pytanie o miarę Lebesgue'a zbioru trajektorii okresowych. Przypuszcza się, że nie istnieje sytuacja, gdy trajektorie okresowe o ustalonym okresie q lokalnie tworzą dwuparametrową rodzinę (zapełniają otwarty podzbiór X). Tak nie jest, gdy brzeg wypukłego bilardu jest krzywą analityczną; można to objaśnić efektem rykoszetu (im bliżej brzegu leży trajektoria, tym częściej się odbija). Gdy okres $q = 2$, to łatwo zobaczyć, że takie trajektorie mogą tworzyć rodzinę co najwyżej 1-parametrową (gdy Ω ma stałą szerokość). M. Rychlik udowodnił, że trajektorie okresowe o okresie $q = 3$ tworzą zbiór miary zero; wykorzystywał przy tym pewne dosyć skomplikowane tożsamości trygonometryczne. Dla $q \geq 4$ problem jest otwarty.

Ważną klasę stanowią tzw. **bilardy rozpraszające**, których brzeg składa się z wklęsłych kawałków. Ich badanie zapoczątkował J. G. Sinaj. Motywację stanowiła hipoteza ergodyczna gazu sztywnych kul w prostopadłościennym pudełku, a dwuwymiarowe wklęsłe bilardy stanowią pierwsze (choć nadal odległe) przybliżenie układu fizycznego.

Okazało się, że bilardy rozpraszające dają piękne przykłady chaotycznych układów dynamicznych. Charakteryzują się one tzw. **strukturą hiperboliczną**; oznacza to, że w pewnych kierunkach w przestrzeni fazowej trajektorie rozchodzą się wykładniczo szybko po długim czasie, a w innych kierunkach trajektorie zблиżają się do siebie wykładniczo szybko. Ponadto trajektorie okresowe są gęste w przestrzeni fazowej i odpowiednia liczba $f(N)$ zachowuje się jak e^{hN} przy $N \rightarrow \infty$, gdzie h jest **entropią** układu, oraz bilardy te są ergodyczne.

Własność hiperboliczności nie jest wyłączna dla bilardów rozpraszających. L. Bunimowicz wykazał, że bilard typu stadion (rysunek poniżej) jest hiperboliczny.



M. Wojtkowski objaśnił to zjawisko, posługując się prawami optyki geometrycznej. Otóż kierunki wykładniczego rozchodzenia się trajektorii odpowiadają specjalnym pękom rozchodzących się trajektorii (promieni). Po odbiciu taki pęk może się jeszcze bardziej rozproszyć (na wklęsłym kawałku brzegu) lub może się skurczyć. Chodzi o to, aby kontrolować skupianie się pęków przy odbiciach. Dlatego też stadion nie może być zbyt długi.



Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1051. Danych jest n liczb ($n \geq 3$) z przedziału $(0, 1]$, takich że przy dowolnym podziale tych liczb na dwie grupy suma liczb w przynajmniej jednej grupie jest nie większa niż 1. Wyznaczyć najmniejszą liczbę M_n , taką że suma wszystkich n liczb jest nie większa niż M_n .

Rozwiązanie na str. 16

M 1052. Niech $w_n(t) = \frac{1}{2^n} [(t + \sqrt{t^2 - 4})^n + (t - \sqrt{t^2 - 4})^n]$. Wykazać, że $w_n(w_m(t)) = w_m(w_n(t))$ dla każdego t .

Rozwiązanie na str. 16

M 1053. Wykazać, że $w_p(p)$ (patrz poprzednie zadanie) jest liczbą całkowitą podzielną przez p dla dowolnej liczby pierwszej p .

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 613. Oszacować odległość między dwoma sąsiednimi punktami światłoczułymi znajdującymi się w ludzkim oku.

Rozwiązanie na str. 3

F 614. Celofanowy balonik dziecięcy został napełniony gorącym powietrzem. Przy jakiej temperaturze tego powietrza balonik będzie się unosił?

Rozwiązanie na str. 14