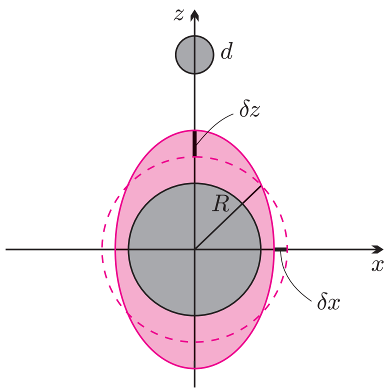
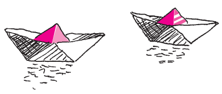
Wysokość pływów na Ziemi

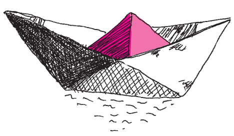
Mikołaj KORZYŃSKI

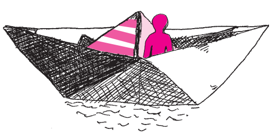
Każdy, kto pamięta jeszcze kurs geografii i fizyki w szkole podstawowej, wie, że zjawisko pływów w oceanach i morzach wywoływane jest przez grawitację Księżyca. Lepiej zorientowani, a zwłaszcza ci, którzy przeczytali artykuł z *Małej Delty* w *Delcie* 11/1987, wiedzą, że pewną rolę odgrywa tu też Słońce. Na ile dobrze jednak rozumiemy całe zjawisko i czy jesteśmy w stanie obliczać i przewidywać wysokość fali pływowej?



Rys. 1. Ziemia całkowicie pokryta oceanem, stan bez i z siłami pływowymi.







Najprostsze oszacowanie wielkości pływów na Ziemi, otrzymamy przyjmując model–zabawkę: Ziemię pokrytą w całości oceanami. Obliczenia oprzemy na spostrzeżeniu, że powierzchnia wody w stanie równowagi musi pokrywać się z powierzchnią stałego potencjału grawitacyjnego. W przeciwnym przypadku niezrównoważona składowa styczna siły ciężkości elementu płynu (wody) powodowałaby ruch cieczy.

Problem sprowadza się więc do pytania o to, jak powierzchnia ekwipotencjalna zmienia się pod wpływem Księżyca lub innego ciała o dużej masie (rys. 1). Przyjmujemy oznaczenia M_Z i M_K – masy odpowiednio Ziemi i Księżyca, d – odległość obu ciał niebieskich. Zapiszmy potencjał

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{K}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}. \tag{1}$$

Będziemy rozważać potencjał w odległościach rzędu promienia Ziemi R od środka układu współrzędnych, dużo mniejszych od d. Dla drugiego członu skorzystamy z przybliżenia Taylora:

$$\frac{\mathrm{G}M_\mathrm{K}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} = \varphi_0 - \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{d^2}\,z + \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{d^3}\,(x^2+y^2-2z^2) + \ldots \tag{2}$$

Stała φ_0 nie ma znaczenia. Wyraz proporcjonalny do z to po prostu przyspieszenie grawitacyjne Księżyca, odpowiedzialne za ruch całości Ziemi, wraz z oceanami, wokół środka masy układu Ziemia–Księżyc. Drugi wyraz, kwadratowy we współrzędnych x, y i z, to główny „winowajca" powstawania pływów. Obliczmy jego wpływ na kształt powierzchni ekwipotencjalnej. Zastosujemy przybliżenie liniowe

$$-\frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{R+\delta x} = -\frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{R} + \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{R^2}\,\delta x + \ldots, \tag{3}$$

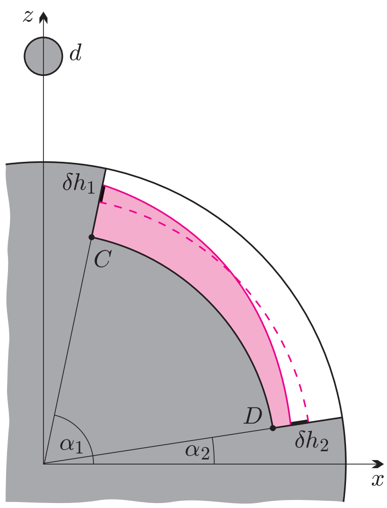
pomijając dalsze wyrazy rozwinięcia. Wtedy z warunku równości potencjału w punktach A i B dostajemy

$$\frac{\mathrm{G}M_\mathrm{K}}{d^3}\,R^2 + \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{R^2}\,\delta x = -\frac{2\mathrm{G}M_\mathrm{K}}{d^3}\,R^2 + \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{R^2}\,\delta z, \tag{4}$$

czyli różnica wysokości bezwzględnych $\delta h = \delta z - \delta x$ wynosi

$$\delta h = \frac{3R^3 M_\mathrm{K}}{d^3 M_\mathrm{Z}} \cdot R. \tag{5}$$

Podstawiając wreszcie dane liczbowe z podręcznika astronomii, dostajemy około 1 m dla pływów wywołanych przez Księżyc i 0,5 m dla słonecznych.



Rys. 2. Ziemia i ocean między kontynentami.

Jak można poprawić ten bardzo uproszczony model? Trzy największe oceany połączone są stosunkowo wąskimi cieśninami, można je więc w przybliżeniu traktować jako niezależne zbiorniki, pokrywające część Ziemi (rys. 2). Różnicę $\delta h_1 - \delta h_2$ obliczamy podobnie jak poprzednio. Współrzędne punktów C i D wynoszą odpowiednio $(R\sin\alpha_1, 0, R\cos\alpha_1)$ i $(R\sin\alpha_2, 0, R\cos\alpha_2)$, więc

$$\frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{R^2}\,\delta h_1 + \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{K}}{d^3}R^2(1-3\cos^2\alpha_1) = \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{Z}}{R^2}\,\delta h_2 + \frac{\mathrm{G}M_\mathrm{K}}{d^3}R^2(1-3\cos^2\alpha_2), \tag{6}$$

a zatem

$$\delta h_1 - \delta h_2 = \frac{3R^3 M_\mathrm{K}}{d^3 M_\mathrm{Z}} \cdot R(\cos^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_2). \tag{7}$$

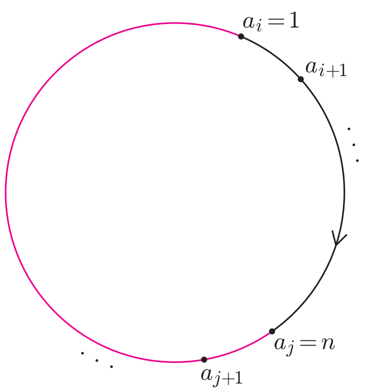
Zwróćmy uwagę, że jest to różnica w poziomie wody w dwóch różnych punktach w tej samej chwili, a nie różnica między najwyższym a najniższym poziomem wody w danym miejscu. Nie popełniając jednak zbyt dużego błędu, możemy przyjąć, że obie wielkości są tego samego rzędu. Z wyprowadzonego wzoru widać, że w mniejszych zbiornikach wodnych wysokość pływów powinna być jeszcze mniejsza, niż uzyskany wcześniej 1 m. Jak jednak nasz wyidealizowany model ma się do rzeczywistości?

Okazuje się, że w niektórych regionach świata (wybrzeże atlantyckie Francji) różnice wysokości wody między przypływami i odpływami wynoszą ponad 10 m! Autor obserwował w północnej Szkocji pływy rzędu 3–4 m, na Islandii około 1,5 m i niemal niezauważalne na Wyspach Owczych. Miejsca te leżą stosunkowo niedaleko od siebie (około 400 km), więc z punktu widzenia naszego modelu te obserwacje wydają się zagadkowe.

Zjawiskiem, którego nie wzięliśmy pod uwagę, jest ruch mas wody spowodowany „wędrowaniem” maksimum wysokości fali pływowej wraz z wędrówką Księżyca na sferze niebieskiej. Innymi słowy, błędnie założyliśmy, że woda pozostaje przez cały czas w równowadze (bezruchu). Rozpędzona masa wody zaś może spiętrzać się przy zbliżaniu się do wybrzeży, tak, jak fale morskie koło plaży.

Aby opisać to ilościowo, musielibyśmy rozwiązać równania hydrodynamiki, przyjmując jakiś model linii brzegowej i profilu dna morskiego. Zamiast tego proponuję Czytelnikom małe ćwiczenia rachunkowe: Jak wysokie pływy powstają w kałuży (rozmiar 2 m)? Jak wysokie byłyby pływy, gdyby Ziemia była na miejscu jednego z księżyców Jowisza, np. Io?

Rozwiązanie zadania M 1048.
Wykażemy, że szukane minimum wynosi $2n-2$. Umieśćmy liczby $a_1, \ldots, a_n$ na okręgu.



Niech i, j będą takie, że $a_i = 1$, $a_j = n$. Z nierówności $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ wynika, że suma modułów różnic sąsiednich wyrazów występujących na każdym z łuków, czarnym i kolorowym, jest nie mniejsza niż $n-1$. Co więcej, minimum to jest osiągane jedynie, jeśli liczby na łuku czarnym i, odpowiednio, kolorowym, występują w porządku rosnącym i, odpowiednio, malejącym. Załóżmy na chwilę, że $i = 1$. Wybór liczb z łuku czarnego można zrealizować na tyle sposobów, ile jest podzbiorów zbioru $\{2, \ldots, n-1\}$, tj. 2^{n-2}. Wybór ten wyznacza jednoznacznie minimalną konfigurację. Zatem, w ogólności, po odrzuceniu założenia $i = 1$, dostajemy odpowiedź: $n2^{n-2}$.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej i Sportu.

2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.

3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.

4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.

5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.

6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.

8. Finaliści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.

9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.

10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu.

11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.

12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.

13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Z przyjemnością informujemy, że firma **Wolfram Research, Inc.** za pośrednictwem swego autoryzowanego dystrybutora w Polsce, firmy **GAMBIT COiS, Sp. z o.o.**, postanowiła ufundować dwie nagrody w tegorocznej edycji **Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki**.

Zdobywca pierwszej nagrody otrzyma pakiet „Mathematica for Students”, natomiast jego opiekun naukowy nagrodzony zostanie pakietem „Mathematica Teacher Edition”.

Zarówno „Mathematica for Students”, jak i „Mathematica Teacher Edition” są pełnymi wersjami programu Mathematica bez żadnych merytorycznych ograniczeń. Mathematica jest programem do obliczeń symbolicznych i numerycznych. Pozwala tworzyć interaktywne dokumenty zawierające tekst, wzory matematyczne, rysunki, animacje i dźwięk.