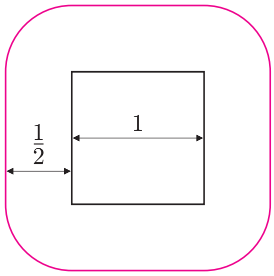
Otoczenie figury

Lev Kourliandtchik

W poniższym artykule opowiem o stosowaniu pojęcia otoczenia figury w rozwiązywaniu zadań. Rozpatrzmy najpierw dwa przykłady geometryczne.

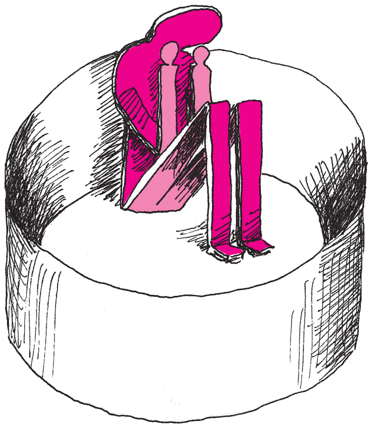
Zadanie 1. Do prostokąta o wymiarach 20×25 wrzucono 120 kwadratów jednostkowych. Udowodnić, że w prostokącie tym można umieścić koło o promieniu $\frac{1}{2}$, które nie ma punktów wspólnych z żadnym kwadratem.



Rys. 1

Rozwiązanie. Wyjaśnijmy najpierw, gdzie może znajdować się środek koła o promieniu $\frac{1}{2}$, które nie przecina danego kwadratu jednostkowego. Miejscem geometrycznym punktów, oddalonych od kwadratu nie więcej niż o $\frac{1}{2}$, jest figura przedstawiona na rysunku 1 (odległością punktu od figury domkniętej nazywamy odległość od najbliższego punktu tej figury). A zatem środek koła o promieniu $\frac{1}{2}$, które nie przecina kwadratu, znajduje się poza figurą przedstawioną na rysunku 1, którą nazwiemy $\frac{1}{2}$-otoczeniem kwadratu. Zbudujmy $\frac{1}{2}$-otoczenie dla każdego z danych 120 kwadratów jednostkowych.

Środek poszukiwanego koła powinien leżeć poza tymi wszystkimi otoczeniami. Oprócz tego, aby koło znajdowało się wewnątrz prostokąta, jego środek musi należeć do mniejszego prostokąta o wymiarach 19×24, który powstanie po przesunięciu każdego boku prostokąta wyjściowego o $\frac{1}{2}$ do wewnątrz.



Zadanie będzie rozwiązane, jeżeli uda się wykazać, że 120 zbudowanych otoczeń nie pokrywa całkowicie mniejszego prostokąta.

Oszacujmy pole, które zajmują te otoczenia. Każde otoczenie składa się z kwadratu o boku 1, czterech prostokątów o wymiarach $1 \times \frac{1}{2}$ i czterech ćwiartek koła o promieniu $\frac{1}{2}$. Zatem pole jednego otoczenia wynosi

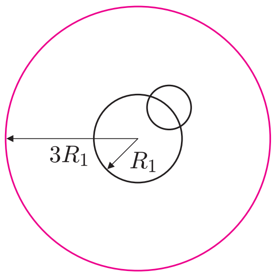
$$1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 + \frac{\pi}{4}.$$

Wszystkie 120 otoczeń pokrywa obszar, którego pole nie przewyższa wielkości

$$120 \cdot \left(3 + \frac{\pi}{4}\right) = 360 + 30\pi.$$

Z drugiej strony pole prostokąta o wymiarach 19×24 wynosi 456. Pozostaje zauważyć, że $360 + 30\pi < 456$, ponieważ $\pi < 3{,}2$.

Zadanie 2. Płaska figura o polu 1 pokryta jest skończoną liczbą kół. Udowodnić, że z tych kół można wybrać jedno koło lub pewną liczbę kół parami rozłącznych, takich że pole, które one zajmują, wynosi nie mniej niż $\frac{1}{9}$.



Rys. 2

Rozwiązanie. Wśród danych kół wybierzmy największe koło i oznaczmy jego promień przez R_1. Jeżeli pole tego koła jest nie mniejsze od $\frac{1}{9}$, to zadanie jest już rozwiązane. Przypuśćmy więc, że $\pi R_1^2 < \frac{1}{9}$. Ponieważ promienie pozostałych kół są nie większe od R_1, więc środki kół przecinających się z kołem wybranym leżą w R_1-otoczeniu tego koła. Natomiast same te koła leżą w $2R_1$-otoczeniu wybranego koła (rys. 2). Ponieważ pole tego $2R_1$-otoczenia, wynoszące $9\pi {R_1}^2$, jest mniejsze od 1, to znajdą się koła, które nie przecinają się z kołem wybranym. Niech R_2 będzie promieniem największego koła wśród takich kół. Jeżeli

$$\pi {R_1}^2 + \pi {R_2}^2 \geqslant \frac{1}{9},$$

to zadanie jest rozwiązane. Jeżeli zaś

$$\pi {R_1}^2 + \pi {R_2}^2 < \frac{1}{9}, \quad \text{to} \quad 9\pi {R_1}^2 + 9\pi {R_2}^2 < 1.$$

A więc znajdzie się koło, którego środek leży poza R_1-otoczeniem koła pierwszego i poza R_2-otoczeniem koła drugiego, i które z tego względu nie przecina się z tymi kołami. Oznaczmy przez R_3 promień największego koła wśród kół, nieprzecinających się z żadnym z dwóch kół wybranych. Jeśli

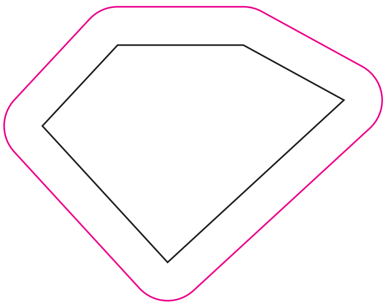
$$\pi {R_1}^2 + \pi {R_2}^2 + \pi {R_3}^2 \geqslant \frac{1}{9},$$

to zadanie jest rozwiązane. W przeciwnym przypadku powyższe rozumowanie powtarzamy. W ten sposób za każdym razem albo znajdujemy pewną liczbę kół parami rozłącznych, dla których suma pól jest niemniejsza od $\frac{1}{9}$, albo jeszcze jedno koło nieprzecinające się z żadnym z kół znalezionych. Ponieważ kół jest skończona liczba, więc w końcu uzyskamy żądany zbiór kół.

W obu rozpatrzonych przykładach pojęcie otoczenia figury okazało się bardzo wygodne. Zauważmy, że możemy je zdefiniować także następująco.

Definicja. Dla dowolnego punktu figury F umieśćmy koło o środku w tym punkcie i promieniu ε. Zbiór punktów wszystkich tych kół nazywa się ε-otoczeniem figury płaskiej F.

Pojęcie ε-otoczenia można wprowadzić także dla ciał przestrzennych. W tym przypadku zamiast kół trzeba rozpatrzyć kule o promieniu ε i środkach w punktach ciała.



Rys. 3

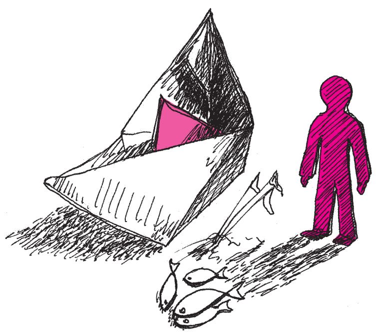
Wyjaśnijmy teraz, jak wygląda ε-otoczenie wielokąta wypukłego. Łatwo jest zrozumieć, że składa się ono z tego wielokąta, prostokątów o wysokości ε zbudowanych na jego bokach jak na podstawach i znajdujących się poza wielokątem, oraz wycinków kołowych o promieniu ε i środkach w wierzchołkach tego wielokąta (rys. 3). Środkowy kąt wycinka przy każdym wierzchołku wielokąta uzupełnia do 180° wewnętrzny kąt wielokąta znajdujący się przy tym wierzchołku, więc suma wszystkich kątów środkowych wynosi

$$180^\circ n - 180^\circ(n-2) = 360^\circ,$$

gdzie n jest liczbą boków wielokąta, a $180^\circ(n-2)$ jest sumą jego kątów wewnętrznych. Oznacza to, że rozmieszczając obok siebie bez nałożenia te wycinki ze środkiem w tym samym punkcie, otrzymamy koło o promieniu ε. Łatwo obliczyć pole ε-otoczenia wielokąta wypukłego. Mianowicie, wynosi ono

$$S + P\varepsilon + \pi\varepsilon^2,$$

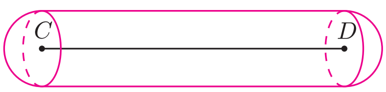
gdzie S oznacza pole wielokąta, P zaś jego obwód.



Rozpatrzmy jeszcze jedno zadanie, które jest łatwe do rozwiązania, jeśli korzystamy z pojęcia otoczenia figury.

Zadanie 3. Punkty A, B, C, D są rozmieszczone w przestrzeni w taki sposób, że długości odcinków AC i BD nie przekraczają 1. Udowodnić, że dla każdego punktu M odcinka AB można znaleźć taki punkt N odcinka CD, że długość odcinka MN nie przekracza 1.

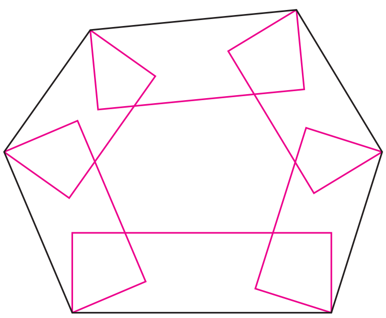
Rozwiązanie. Stwierdzenie, którego trzeba dowieść, można sformułować w następujący sposób: każdy punkt odcinka AB znajduje się w odległości nie większej niż 1 od odcinka CD, a więc należy do 1-otoczenia odcinka CD. Otoczenie to składa się z walca kołowego o promieniu 1, którego osią jest odcinek CD, oraz dwóch półkul, znajdujących się poza walcem, o promieniach 1 i środkach w punktach C i D, których podstawami są podstawy walca (rys. 4). Z warunków zadania wynika, że punkty A i B należą do 1-otoczenia odcinka CD. A ponieważ otoczenie to jest wypukłe, więc zawiera cały odcinek AB, co kończy dowód.



Rys. 4

Zadanie 4. Udowodnić, że do wielokąta wypukłego o polu S i obwodzie P można włożyć koło o promieniu $\frac{S}{P}$.

Rozwiązanie. Zbudujmy na każdym boku danego wielokąta prostokąt, który będzie się znajdował wewnątrz wielokąta i którego drugi bok będzie długości $\frac{S}{P}$ (rys. 5).



Rys. 5

Jest jasne, że suma pól tych prostokątów wynosi S. A ponieważ prostokąty te przecinają się, więc nie pokrywają one wielokąta w całości. Zatem za żądany okrąg wystarczy wziąć okrąg o promieniu $\frac{S}{P}$ i środku w punkcie wielokąta, który nie został pokryty zbudowanymi prostokątami.

Na koniec proponuję zadanie do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 5. Na płaszczyźnie rozmieszczono trójkąty równoboczne pokrywające wspólnie obszar o polu równym 1. Udowodnić, że spośród tych trójkątów można wybrać pewną liczbę parami rozłącznych trójkątów, których suma pól jest nie mniejsza od $\frac{1}{16}$.