Klub 44

$\otimes\sqrt{\ldots!} = 44$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2004

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
461 ($WT = 1{,}92$) i **462** ($WT = 1{,}49$)
z numeru 5/2003

Michał Adamaszek	– Kęty	43,17
Paweł Najman	– Jaworzno	39,72
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	37,40
Michał Jóźwikowski	– Błonie	36,70
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	36,07
Paweł Kubit	– Kraków	35,99
Piotr Kumor	– Olsztyn	35,49

Zadania z matematyki nr 473, 474

Redaguje Marcin E. KUCZMA

473. Trapez $ABCD$ o równoległych podstawach AB, CD jest wpisany w okrąg Ω. Okrąg ω, styczny wewnętrznie do Ω w punkcie T, jest też styczny do odcinków BC i CA. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie K. Dowieść, że punkty D, K, T są współliniowe.

474. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych n równanie
$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1} = n$$
ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z?

Zadanie **474** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

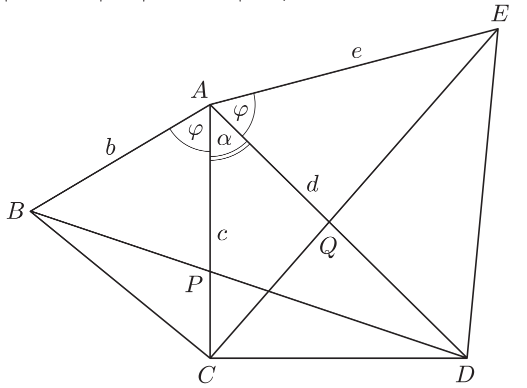
Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/2003

Przypominamy treść zadań:

465. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD|$, $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADE|$, a pole trójkąta ACD jest średnią geometryczną pól trójkątów ABC i AED. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P; przekątne AD i CE przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $|AP| = |AQ|$.

466. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y równanie $x + 2^y = 2^x$.

465. Przyjmijmy oznaczenia:
$|AB| = b,\ |AC| = c,\ |AD| = d,\ |AE| = e, |\sphericalangle CAD| = \alpha,$
$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD| = \varphi.$



Z danych w założeniach równości kątów wynika, że trójkąty BAC i EAD są podobne, a zatem $b/c = e/d =: k$. Warunek wiążący pola trójkątów ACD oraz ABC i AED daje równość $(cd\sin\alpha)^2 = (bc\sin\varphi)(de\sin\varphi)$, skąd po podstawieniu $b = kc,\ e = kd$ dostajemy: $\sin\alpha = k\sin\varphi$.

Korzystając z uzyskanych związków, obliczamy:
$$\frac{|AP|}{|AC|} = \frac{\text{pole}(ABD)}{\text{pole}(ABCD)} = \frac{bd\sin(\varphi+\alpha)}{bc\sin\varphi + cd\sin\alpha} =$$
$$= \frac{kcd(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\cdot k\sin\varphi)}{kc^2\sin\varphi + cd\cdot k\sin\varphi} =$$
$$= \frac{d(\cos\alpha + k\cos\varphi)}{c+d},$$
czyli
$$|AP| = \frac{cd}{c+d}(\cos\alpha + k\cos\varphi).$$
Otrzymane wyrażenie jest symetryczne względem c, d; zatem $|AQ|$ wyraża się tym samym wzorem.

466. Załóżmy, że liczby całkowite x, y spełniają podane równanie. Jeśli $x < 0$, to 2^x jest liczbą z przedziału $(0;1)$, podczas gdy $x + 2^y$ jest liczbą całkowitą lub liczbą ujemną. Wobec tego $x \geqslant 0$.

Gdy $x = 0$, to $2^y = 2^x$, więc $y = 0$; para $(0,0)$ jest rozwiązaniem.

Gdy $x > 0$, to $2^y < 2^x$, więc $y < x$, czyli $y \leqslant x - 1$. Wówczas
$$x = 2^x - 2^y \geqslant 2^x - 2^{x-1} = 2^{x-1}.$$
Ale dla każdej liczby całkowitej $x \geqslant 1$ zachodzi nierówność $2^{x-1} \geqslant x$, która staje się równością jedynie dla $x = 1$ oraz $x = 2$. Dla tych dwóch wartości x dostajemy dla y odpowiednio wartości $y = 0$ oraz $y = 1$.

Istnieją więc trzy pary (x,y) spełniające równanie: $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$.

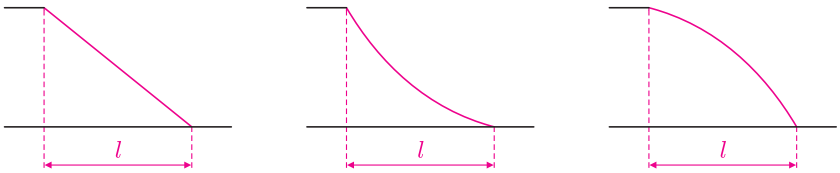
Klub 44

Zadania z fizyki nr 370, 371

Redaguje Jerzy B. BROJAN

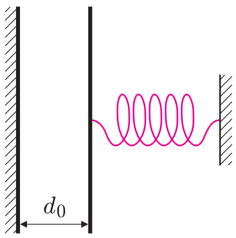
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 2004

370. Górka ma jedno zbocze będące równią pochyłą, drugie zbocze jest wklęsłe, a trzecie – wypukłe (rys. 1), przy czym zarówno wysokość zboczy, jak i długość rzutu na płaszczyznę poziomą są jednakowe.



Rys. 1

Dyzio zjechał sankami ze zbocza prostoliniowego i narzeka: „Marny dzisiaj śnieg, nawet na samym dole nie można się porządnie rozpędzić!”. Czy Dyzio rozpędzi się bardziej, gdy zjedzie z innego zbocza, a jeśli tak, to z którego? Współczynnik tarcia sanek o śnieg jest wszędzie taki sam, a opór powietrza pomijamy. Zabronione jest odpychanie się od podłoża (dotyczy to zwłaszcza zbocza wypukłego, które musi od początku być dostatecznie nachylone, aby sanki ruszyły z miejsca).



Rys. 2

371. Dwie równoległe płytki przewodzące o powierzchni S tworzą kondensator powietrzny. Jedna z płytek jest nieruchoma, a drugą przymocowano do sprężynki o stałej sprężystości k, przy czym dla sprężynki swobodnej odległość między płytkami jest równa d_0 (rys. 2). Jakie jest maksymalne napięcie, które można przyłożyć do takiego kondensatora, aby płytki się nie zetknęły? Jaką maksymalną energię może zmagazynować taki układ? Napięcie wzrasta stopniowo, tak że płytka nie zostanie wprawiona w drgania.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/2003

Przypominamy treść zadań:

362. Stacja kosmiczna o masie $m = 10$ ton zawiera w objętości $V = 40$ m^3 powietrze pod ciśnieniem $p_0 = 10^5$ Pa i o temperaturze $T = 20°$ C. Nagle w ściance stacji powstał otwór o powierzchni $S = 1$ mm^2.

a) Po jakim czasie ciśnienie wewnątrz stacji spadnie do wartości $p_1 = 0{,}5 \cdot 10^5$ Pa (jeśli kosmonauci nie podejmą żadnych kroków zaradczych)? Zakładamy, że rozprężenie przebiega izotermicznie.

b) Jaką prędkość uzyska stacja wskutek odrzutu? Otwór jest tak położony, że odrzut nie spowoduje obrotu stacji.

363. W Canberze (Australia) jest fontanna, która wytryskuje wodę na wysokość 150 m. W każdej chwili w powietrzu znajduje się 6 m^3 wody. Jaka musi być minimalna moc pompy?

362. Prędkość v strumienia gazu wylatującego przez otwór można obliczyć z równania Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii)

$$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

gdzie ρ jest gęstością gazu, a M – masą molową. Iloczyn v przez powierzchnię otworu S jest objętością (przed rozprężeniem) gazu wypływającego na jednostkę czasu, a po pomnożeniu przez p/RT otrzymujemy, o ile zmniejszyła się liczba moli

$$\mathrm{d}n = -\frac{pS}{RT} v\,\mathrm{d}t = -\frac{pS}{RT}\sqrt{\frac{2RT}{M}}\,\mathrm{d}t.$$

Stąd wynika zmiana ciśnienia

$$\mathrm{d}p = -p\frac{S}{V}\sqrt{\frac{2RT}{M}}\mathrm{d}t.$$

Całkując, obliczamy szukany czas

$$t = \frac{V}{S}\sqrt{\frac{M}{2RT}}\ \ln\frac{p_0}{p_1} \approx 67700 \text{ s} = 18{,}8 \text{ h},$$

gdzie podstawiliśmy masę molową powietrza równą 29 g.

Prędkość v_s uzyskaną przez stację wyznaczymy z zasady zachowania pędu

$$v_s = v\frac{\Delta m}{m} = vM\frac{\Delta n}{m} = \frac{V(p_0 - p_1)}{m}\sqrt{\frac{2M}{RT}} = 0{,}98 \text{ m/s}.$$

Ścisłe całkowanie ruchu stacji z uwzględnieniem zmian jej masy nie jest tu konieczne, gdyż te zmiany są niewielkie (wypłynie tylko ok. 24 kg powietrza, tzn. 1/400 masy stacji).

363. Pomijając opór powietrza, czas lotu wody w górę i w dół wynosi łącznie

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{\mathrm{g}}} = 11{,}1 \text{ s}.$$

Na jednostkę czasu wyrzucana jest więc masa wody równa

$$m/t = 6000 \text{ kg}/11{,}1 \text{ s} = 542 \text{ kg/s},$$

a moc pompy obliczymy ze wzoru

$$P = mgh/t \approx 800 \text{ kW}.$$