Kilka słów o zbiorach i funkcjach

Konrad PIÓRO

Zacznijmy od następującego klasycznego zadania: Niech X będzie zbiorem mającym dokładnie n elementów. Ile jest różnych podzbiorów zbioru X? Dla ustalenia uwagi możemy oczywiście założyć, że $X = \{1, \ldots, n\}$. Wtedy tworząc podzbiór zbioru X możemy wziąć lub nie brać 1, następnie wziąć lub nie 2, itd.. Za każdym razem mamy dwie możliwości, zatem wszystkich podzbiorów zbioru X jest $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$.

Rozwiązanie zadania F 611.
Mamy

$$L = AC = l[(1+\sin\alpha)^2 + (1-\cos\alpha)^2]^{1/2} = l\sqrt{3}.$$

Druga zasada dynamiki w dolnym punkcie daje:

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg.$$

Z zasady zachowania energii otrzymujemy, że

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(1-\cos\alpha) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L},$$

stąd

$$T = mg(3-\sqrt{2}) + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Przyjrzyjmy się temu rozwiązaniu. Otóż każdemu podzbiorowi $A \subseteq X$ przyporządkowaliśmy n-elementowy ciąg złożony z 0 i 1, taki że na i-tym miejscu występuje 0, jeśli i nie należy do A, i 1 w przeciwnym przypadku. Milcząco założyliśmy (co nie jest specjalnie skomplikowane do pokazania), że dwa różne podzbiory wyznaczają dwa różne ciągi i że każdy ciąg wyznacza jakiś podzbiór. Następnie policzyliśmy, ile jest takich ciągów.

Zauważmy teraz, że powyższą konstrukcję można uogólnić na dowolny (także nieskończony) zbiór X i jego podzbiory. Dokładniej, dla dowolnego podzbioru $A \subseteq X$ funkcję χ_A, taką że

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \in A, \\ 0 & \text{jeśli } x \notin A, \end{cases}$$

nazywamy funkcją charakterystyczną A.

Przyporządkowując każdemu podzbiorowi zbioru X jego funkcję charakterystyczną otrzymamy utożsamienie zbioru $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X ze zbiorem $\{0,1\}^X$ wszystkich funkcji określonych na X o wartościach 0 i 1. Mówiąc bardziej precyzyjnie, funkcja $A \longmapsto \chi_A$ jest bijekcją ze zbioru $\mathcal{P}(X)$ na $\{0,1\}^X$. Jeśli weźmiemy dwa różne podzbiory $A, B \subseteq X$, to istnieje element x_0 taki, że $x_0 \in A$ i $x_0 \notin B$ (lub odwrotnie). Wtedy $\chi_A(x_0) = 1$ i $\chi_B(x_0) = 0$ (lub odwrotnie). Zatem nasza funkcja jest różnowartościowa, tzn. dla dowolnych zbiorów A, B

$$(*) \qquad A = B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B.$$

Jeśli natomiast weźmiemy funkcję $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ i zbiór $A = \{x : f(x) = 1\}$, to łatwo się przekonać, że $\chi_A = f$. Zatem nasza funkcja $A \longmapsto \chi_A$ jest również „na”.

Oczywiście nie możemy wziąć zwykłego dodawania, bo wtedy suma $1+1$ nie byłaby określona. „Nowe” dodawanie oznaczamy w klasyczny sposób, bo innego w tym artykule nie będziemy używać.

Na dwuelementowym zbiorze $\{0,1\}$ możemy rozważać zwykłe działanie mnożenia oraz następujące działanie dodawania:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

,

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

.

Łatwo zauważyć, że $+$ jest dodawaniem modulo 2, tzn. wynikiem działania $a + b$ jest reszta z dzielenia przez 2 zwykłej sumy. Łatwo również pokazać, że te działania spełniają następujące warunki (gdzie pod a, b, c podstawiamy 0 lub 1):

Zbiór $\{0,1\}$ z tymi dwoma działaniami oznacza się na ogół przez $\mathbb{Z}_2$.

(1) $a + b = b + a$ (przemienność dodawania),

(2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (łączność dodawania),

(3) istnieje element $\underline{0}$ taki, że $a + \underline{0} = a$ (element neutralny dodawania),

Oczywiście w przypadku $\mathbb{Z}_2$ mamy $\underline{0} = 0$.

(4) dla dowolnego a istnieje element b taki, że $a + b = \underline{0}$; taki b oznaczamy przez $-a$ (element przeciwny do a),

(5) $a \cdot b = b \cdot a$ (przemienność mnożenia),

(6) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (łączność mnożenia),

(7) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (rozdzielność dodawania względem mnożenia),

(8) istnieje element $\underline{1}$ taki, że $a \cdot \underline{1} = \underline{1}$ (element neutralny mnożenia).

Oczywiście w przypadku $\mathbb{Z}_2$ mamy $\underline{1} = 1$.

Każdy zbiór z dwoma działaniami, które spełniają (1)–(8) (dla dowolnych elementów tego zbioru) nazywamy *pierścieniem przemiennym z jedynką*. Oczywiście liczby całkowite $\mathbb{Z}$ (jak również wymierne, rzeczywiste i zespolone) z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia również spełniają te warunki.

Pierścienie spełniające (9) nazywamy pierścieniami Boole'a.

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{Z}_2$ spełnia dodatkowo

(9) $a + a = \underline{0}$ i $a \cdot a = a$.

Przykład $\mathbb{Z}_2$ pokazuje, że istnieją również pierścienie inne niż liczby całkowite. Ale to nie wszystko. Mając działania na $\{0, 1\}$ możemy zdefiniować analogiczne działania na zbiorze $\{0, 1\}^X$ o podobnych własnościach. Dokładniej, niech $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ i $g : X \longrightarrow \{0, 1\}$ będą funkcjami. Wtedy sumę $f + g$ i iloczyn $f \cdot g$ definiujemy tak:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{i} \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{dla każdego } x \in X.$$

Ponieważ wykonujemy operacje dodawania i mnożenia na wartościach funkcji, więc jest jasne, że tak zdefiniowane operacje także spełniają warunki (1)–(8) i (9). Oczywiście elementem neutralnym dodawania jest funkcja stale równa zero, a elementem neutralnym mnożenia funkcja stale równa jeden. W szczególności mamy kolejny przykład pierścienia przemiennego z jedynką, a dokładniej całą rodzinę pierścieni (dla różnych zbiorów X mamy różne pierścienie).

Na marginesie zauważmy, że z definicji dodawania i mnożenia w $\{0, 1\}^X$ łatwo wynika, że każda równość prawdziwa w $\mathbb{Z}_2$ jest prawdziwa w $\{0, 1\}^X$. Co więcej, jeśli $X \neq \emptyset$, to każda równość prawdziwa w $\{0, 1\}^X$ jest również prawdziwa w $\mathbb{Z}_2$. W tym celu wystarczy wziąć funkcje będące elementami neutralnymi dodawania i mnożenia. Te dwie funkcje, ich dodawanie i mnożenie, zachowują się tak samo jak zero i jedynka w $\mathbb{Z}_2$.

W ten sposób zanurzyliśmy $\mathbb{Z}_2$ w pierścień $\{0, 1\}^X$.

A czy te teoretyczne rozważania można wykorzystać w praktyce (np. do rozwiązywania zadań)? Ponieważ zbiór A możemy utożsamiać z jego funkcją charakterystyczną χ_A, zastanówmy się najpierw jak mnożenie i dodawanie takich funkcji można przetłumaczyć na zbiory. Oczywiście iloczyn dwóch funkcji charakterystycznych odpowiada funkcji charakterystycznej iloczynu zbiorów:

(R.1) $\qquad \chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ dla dowolnych $A, B \subseteq X$.

Natomiast suma dwóch funkcji charakterystycznych odpowiada funkcji charakterystycznej różnicy symetrycznej:

(R.2) $\qquad \chi_{A \div B} = \chi_A + \chi_B$ dla dowolnych $A, B \subseteq X$.

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$$
wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\chi_A(x) = 1 \quad \text{i} \quad \chi_B(x) = 1$$
dla każdego $x \in X$.

Z kolei dla $x \in X$
$$\chi_A(x) + \chi_B(x) = 1$$
wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\chi_A(x) = 1 \quad \text{i} \quad \chi_B(x) = 0$$
lub
$$\chi_A(x) = 0 \quad \text{i} \quad \chi_B(x) = 1,$$
czyli wtedy i tylko wtedy, gdy
$$x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = A \div B.$$

Zauważmy teraz, że z tych dwóch równości i $(*)$ otrzymujemy

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C,$$

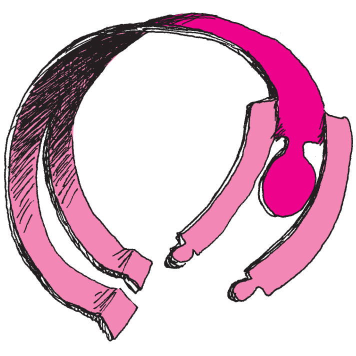
$$\chi_{A \div (B \div C)} = \chi_A + \chi_{B \div C} = \chi_A + (\chi_B + \chi_C) \overset{\text{z warunku 2}}{=} (\chi_A + \chi_B) + \chi_C =$$
$$= \chi_{A \div C} + \chi_C = \chi_{(A \div B) \div C}\,.$$

W podobny sposób (korzystając z (7)) pokazujemy

$$A \cap (B \div C) = ((A \cap B) \div (A \cap C)).$$

Oczywiście w ten sam sposób każde wyrażenie składające się z iloczynów zbiorów i różnic symetrycznych może być przetłumaczone na wyrażenie składające się z iloczynów i sum funkcji charakterystycznych. W szczególności otrzymujemy, że rodzina $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X wraz z różnicą symetryczną i iloczynem zbiorów spełnia warunki (1)–(8) (tzn. jest pierścieniem przemiennym z jedynką) oraz dodatkowo warunek (9). Oczywiście elementem neutralnym dodawania (tzn. różnicy symetrycznej) jest zbiór pusty $\emptyset$, a elementem neutralnym mnożenia jest cały zbiór X. Stąd wynika, że rachunki na $\mathcal{P}(X)$ przy użyciu różnicy symetrycznej $\div$ i iloczynu zbiorów $\cap$ układają się dokładnie tak samo jak w zwykłej arytmetyce liczb całkowitych (warunki (1)–(8)) z tym, że można pominąć wszystkie potęgi (druga równość z warunku (9)), a współczynniki redukować modulo 2 (pierwsza równość z (9)), tzn.

Aby w pełni docenić przedstawiony sposób dowodu powyższych dwóch równości, należy teraz przypomnieć sobie (długi) dowód wykorzystujący definicję różnicy symetrycznej oraz dobrze znane fakty o sumie, iloczynie i rożnicy zbiorów.



$$\underbrace{A \div A \div \ldots}_{n} = \begin{cases} A & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzyste} \\ \emptyset & \text{jeśli } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Ponieważ suma zbiorów $\cup$ i różnica zbiorów $\backslash$ dają się wyrazić za pomocą $\div$ i $\cap$:

$$A \cup B = A \div B \div (A \cap B) \quad \text{i} \quad A \backslash B = A \div (A \cap B),$$

to cała algebra zbiorów daje się ująć jako arytmetyka pierścienia $\mathcal{P}(X)$ z $\div$ i $\cap$.