Karciana sztuczka, rekurencja i komputer

Dariusz LASKOWSKI

Weź osiem kart: asa, króla, damę, waleta, dziesiątkę, dziewiątkę, ósemkę i siódemkę i połóż jedną na drugiej w następującej kolejności: A, 10, K, 8, D, 9, W, 7. Następnie odwróć talon koszulką do góry i wyłóż karty, stosując następującą procedurę: odkrywasz kartę i kładziesz ją na stole, a następną chowasz pod spód talonu. I co? Jeśli wszystko zrobiłeś według opisu, to karty leżą w kolejności A, K, D, W, 10, 9, 8, 7. Tę prostą sztuczkę karcianą pokazał mi kiedyś pewien młody harcerz. Zagadką było to, w jakiej kolejności ułożyć karty w talonie, aby stosując powyższą procedurę ich odkrywania, wyłożyć je na stole kolejno. Zanim przeczytasz dalszy ciąg tego artykułu, spróbuj to zrobić na przykład dla dziesięciu kart (albo całego koloru od asa do dwójki).

Ciekaw jestem, czy Ci się to udało, a najbardziej – jak sobie poradziłeś z tym problemem. Jak najprościej sobie z nim poradzić? Nie wiem. Ja znalazłem wtedy taką metodę: układam karty w talonie kolejno, wykładam je na stół, stosując powyższą procedurę (dla ośmiu kart otrzymuje się wtedy ciąg A, D, 10, 8, K, 9, W, 7), patrząc na wyłożone karty, układam osiem kart innego koloru, kierując się otrzymaną informacją. Dla przykładu z ośmioma kartami wygląda to tak: as był we właściwym miejscu, bo leży tam, gdzie trzeba, to samo dotyczy dziewiątki i siódemki, króla trzeba położyć tam, gdzie była dama, bo ona znalazła się na drugim miejscu, damę tam, gdzie była dziesiątka, waleta tam, gdzie była ósemka, dziesiątkę tam, gdzie był król, ósemkę tam, gdzie był walet w pomocniczej talii.

Spróbuj ułożyć tak całą talię kart, aby wyłożyć ją kolejno kolorami: trefle, kara, kiery, piki, a karty w kolorach w kolejności malejącej. Męczące? A to tylko 52 karty.

Rozwiązanie zadania F 612.
W górnym położeniu na kulkę w kierunku pionowym działa siła ciężkości mg i składowa siły Coulomba

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 5\sqrt{5}l^2}.$$

Aby zachodził ruch po okręgu, musi być spełniony warunek

$$\frac{mv^2}{l} \geqslant mg + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 5\sqrt{5}l^2}.$$

Z zasady zachowania energii

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2mgl$$

otrzymujemy

$$v_0 \geqslant \left(5gl + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 5\sqrt{5}lm}\right)^{1/2}.$$

Uogólnijmy nasz problem. Mamy n kart ponumerowanych liczbami naturalnymi od 1 do n. Należy je ułożyć w takiej kolejności w talonie, aby wykładając je kolejno: pierwszą na stół, drugą pod spód talonu itd. aż do wyczerpania się kart w talonie, po zakończeniu na stole leżały one kolejno od 1 do n.

W kolejnym kroku wykonujemy dwie czynności: wykładamy na stół wierzchnią kartę talonu, a następną wkładamy pod spód talonu. Niech P_n^i oznacza układ elementów talii pozostałych przed wykonaniem i-tego kroku. P_n^1 oznacza zatem początkowy układ kart (ten przez nas poszukiwany). W tych oznaczeniach mamy:

$$P_n^{i+1}(j) = \begin{cases} P_n^i(j+2) & \text{dla } j < n-i, \\ P_n^i(2) & \text{dla } j = n-i. \end{cases}$$

Odwróćmy sytuację:

$$P_n^i(j) = \begin{cases} i & \text{dla } j = 1, \\ P_n^{i+1}(n-i) & \text{dla } j = 2, \\ P_n^{i+1}(j-2) & \text{dla } 2 < j \leqslant \\ & \leqslant n-i+1. \end{cases}$$

To pozwala w sformalizowany sposób obliczyć np. $P_5^1(j)$ dla $1 \leqslant j \leqslant 5$.

$P_5^1(1) = 1.$

$P_5^1(2) = P_5^2(4) = P_5^3(2) =$
$= P_5^4(2) = P_5^5(1) = 5.$

$P_5^1(3) = P_5^2(1) = 2.$

$P_5^1(4) = P_5^2(2) = P_5^3(3) = P_5^4(1) = 4.$

$P_5^1(1) = P_5^2(3) = P_5^3(1) = 3.$

Sprawdźcie sami, za pomocą naszego mechanicznego sposobu z kartami, że to działa.

W celu obliczenia $P_n^1(j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$ dla większych n zatrudnimy komputer.

Oto wyniki obliczeń dla $n = 1, 2, 3, \ldots, 14$. Otrzymujemy ciekawy trójkąt przywodzący na myśl trójkąt Pascala, choć wielce do niego niepodobny.

Oznaczmy przez $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ k-ty wyraz w n-tym rzędzie naszego trójkąta. Można zauważyć kilka własności świeżo zdefiniowanego symbolu:

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = 1; \quad \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} + 1; \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{bmatrix} + 1.$$

1
1 2
1 3 2
1 3 2 4
1 5 2 4 3
1 4 2 6 3 5
1 6 2 5 3 7 4
1 5 2 7 3 6 4 8
1 9 2 6 3 8 4 7 5
1 6 2 10 3 7 4 9 5 8
1 9 2 7 3 11 4 8 5 10 6
1 7 2 10 3 8 4 12 5 9 6 11
1 12 2 8 3 11 4 9 5 13 6 10 7
1 8 2 13 3 9 4 12 5 10 6 14 7 11

Powstaje kilka pytań związanych z naszą sztuczką, na które autor nie znalazł odpowiedzi. Na przykład, ile razy w trakcie wykładania kart dana karta jest przekładana na spód talonu? A może uda się znaleźć wzór na $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ niewykorzystujący rekurencji? Gdyby któryś z Czytelników tego dokonał, proszę o kontakt pod adresem prawar@poczta.onet.pl.