Hipoteza Poincarégo? *Paweł STRZELECKI*

11 listopada 2002 roku Grigorij Jakowlewicz Perelman, geometra pracujący w Petersburskim Oddziale Instytutu Matematycznego im. Stiekłowa przy Fontance 27, udostępnił w Internecie 40-stronicową pracę pod tytułem *Formuła entropii dla potoku Ricciego i jej zastosowania geometryczne.* Czwartą stronę suchego i najeżonego fachowymi terminami wprowadzenia kończy zdanie: *Wreszcie, w rozdziale 13, podajemy krótki szkic dowodu hipotezy geometryzacyjnej.*

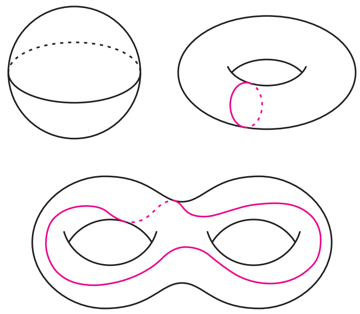
Wspomniana hipoteza pochodzi od Williama Thurstona i dotyczy budowy trójwymiarowych rozmaitości. Jest tak ogólna i potężna, że słynna hipoteza Poincarégo – jeden z siedmiu problemów za milion dolarów z listy Instytutu Claya, patrz *Aktualności, Delta* 8/2000 – wypływa z niej jako prosty wniosek.

10 marca 2003 roku Perelman udostępnił drugą pracę, *Potok Ricciego z chirurgią na rozmaitościach trójwymiarowych.* Szkic dowodu z pierwszego preprintu został w niej opisany znacznie dokładniej.

W kwietniu 2003 roku Perelman wygłaszał serie wykładów na kilku znanych uniwersytetach amerykańskich, a w kilku miejscach świata ekipy ekspertów zaczęły podczas wielotygodniowych seminariów brnąć przez jego prace, napisane z bolesną zwięzłością. Pojawiły się niezależne dowody niektórych twierdzeń z obu prac Perelmana, a on sam napisał w lipcu 2003 trzeci preprint, podając uproszczoną wersję swego dowodu tego przypadku hipotezy geometryzacyjnej Thurstona, który wystarcza do wnioskowania o prawdziwości hipotezy Poincarégo. W chwili, gdy piszę te słowa, ostatecznej i zgodnej opinii fachowców jeszcze nie ma, ale wiele osób wyraża nie bez powodu ostrożny optymizm. Cała sprawa wygląda na tyle poważnie, że wypada o niej opowiedzieć Czytelnikom *Delty*.

1. Od ponad stu lat znamy listę wszystkich zwartych, orientowalnych rozmaitości dwuwymiarowych, tzn. takich powierzchni, które mają dwie strony, a za to nie mają ani brzegu, ani żadnych nakłuć czy rozcięć, ani powyciąganych nieskończenie daleko odnóg. Jest to lista ponumerowana wszystkimi liczbami naturalnymi; na jej pierwszym miejscu figuruje sfera $\mathbb{S}^2$, na drugim – torus $\mathbb{T}^2$, na trzecim – precel, który uzyskujemy wyciąwszy w torusie dwa otwory i dokleiwszy w to miejsce rurkę itd. Otrzymujemy w ten sposób, jak mówi matematyk, *klasyfikację z dokładnością do homeomorfizmu*: dwie powierzchnie uznajemy za identyczne, jeśli istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie jednej z nich na drugą. Oznacza to, że powierzchnię symetrycznego torusa obrotowego utożsamiamy z powierzchnią kubka z jednym uchem. (Więcej na temat dwuwymiarowych powierzchni – patrz artykuł J. Górnickiego *Kilka słów o powierzchniach*, *Delta* 6/1995.)

Zwróćmy uwagę, że wśród tych powierzchni jedynie sfera ma tę własność, że każdą położoną na niej krzywą zamkniętą można w sposób ciągły, bez rozrywania, zdeformować do punktu. Na torusie i na wszelkich preclach jest masa krzywych, których do punktu bez rozrywania zdeformować się nie da.



Rys. 1. Sfera, torus i precel. Kolorowych krzywych na torusie i preclu nie można w sposób ciągły zdeformować do punktu.

2. Rozmaitości trójwymiarowe to *możliwe formy naszej przestrzeni*; więcej informacji – patrz artykuł Zbigniewa Marciniaka pod takim właśnie tytułem w *Delcie* 5/1997. Przykłady zwartych rozmaitości trójwymiarowych to
(a) sfera $\mathbb{S}^3$, czyli zbiór tych punktów (x, y, z, w) przestrzeni czterowymiarowej, których współrzędne spełniają warunek $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$,
(b) torus $\mathbb{T}^3$, czyli rozmaitość, którą uzyskuje się, sklejając pary przeciwległych ścian sześcianu,
(c) produkt kartezjański okręgu i precla z rysunku 1.

Osobom, które stwierdzą, że nie ma po co myśleć o jakichś tam rozmaitościach, bo przecież przestrzeń wokół nas jest euklidesowa i każdy to widzi, pragnę przypomnieć, że przez setki lat prawie wszyscy „widzieli”, że Ziemia jest płaska.

3. W 1904 roku Poincaré wyraził przypuszczenie, że sferę $\mathbb{S}^3$ spośród innych trójwymiarowych rozmaitości zwartych wyróżnia ta sama własność, która charakteryzuje o jeden wymiar niżej jej koleżankę $\mathbb{S}^2$. Mianowicie,

jeśli na trójwymiarowej zwartej rozmaitości M^3 (bez brzegu) każdą krzywą zamkniętą można w sposób ciągły zdeformować do punktu, to M^3 jest homeomorficzna ze sferą $\mathbb{S}^3$.

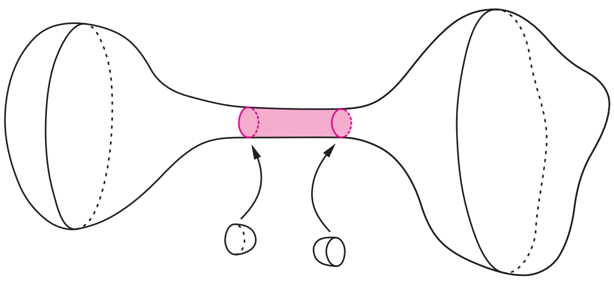
To właśnie jest hipoteza Poincarégo. Co ciekawe, jej uogólnienia na rozmaitości wymiaru $n \geqslant 4$ zostały już udowodnione.

4. W końcu lat 70. XX wieku Thurston wysunął dalekosiężną hipotezę, głoszącą, że każdą rozmaitość trójwymiarową można rozciąć – prowadząc (dwuwymiarowe) cięcia wzdłuż sfer $\mathbb{S}^2$ lub torusów $\mathbb{T}^2$ – na skończoną liczbę części, z których każdą można wyposażyć w jedną z modelowych geometrii. Oznacza to, mówiąc mętnie, że na każdej części można tak określić sposób pomiaru odległości, by inteligentne zielone ludziki wyposażone wyłącznie w taśmę mierniczą nie potrafiły w obrębie danej części odróżniać rozmaitych miejsc przestrzeni, gdyż wszystko wszędzie wygląda identycznie i jeśli nawet pojawiają się jakieś zakrzywienia czy skręcenia przestrzeni, to ich struktura jest w każdym punkcie taka sama. W wymiarze 2 dobre przykłady takiej sytuacji to zwykła płaszczyzna, sfera $\mathbb{S}^2$ i płaszczyzna Łobaczewskiego. Thurston wykazał, że w wymiarze 3 takich eleganckich modelowych geometrii jest dokładnie osiem.

5. Mniej więcej 20 lat temu Hamilton nakreślił śmiały program prac nad hipotezą geometryzacyjną Thurstona. Oto zarys pomysłu: należy wziąć rozmaitość, wyposażyć w jakąkolwiek metrykę, a następnie puścić w ruch, w taki sposób, aby prędkości różnych punktów zależały (w jakiś sposób) od krzywizny w danym miejscu. Po co? Otóż po to, żeby najlepiej cała rozmaitość, albo przynajmniej jej pokaźne fragmenty, nabrały zgrabnego, symetrycznego kształtu.

O prostym przykładzie podobnego ruchu krzywych i powierzchni – tzw. ewolucji krzywiznowej i średniokrzywiznowej – można poczytać w *Delcie* 4/2003. Odsyłam tam po nieco więcej szczegółów; wspomnę tu jedynie, że jeśli prędkość zamkniętej krzywej płaskiej jest równa krzywiźnie i skierowana wzdłuż wektora normalnego, to wszelkie fałdki, wklęsłości i zawijasy owej krzywej ulegają stopniowemu wygładzeniu i koniec końców krzywa przypomina idealny okrąg. Zupełnie nie ma znaczenia, jak wyglądała na początku. W przypadku powierzchni jest gorzej – mogą pojawiać się rozmaite osobliwości, gdyż cieniutkie rureczki kurczą się znacznie szybciej niż pękate bąble.

W wymiarze 3 należy, po pierwsze – odpowiednio zdefiniować sam „ruch” rozmaitości, po drugie – wykazać istnienie rozwiązań, po trzecie – przewidzieć charakter osobliwości i jak najdokładniej je opisać, po czwarte – nauczyć się zapobiegać występowaniu osobliwości poprzez sprytne rozcinanie rozmaitości na odpowiednie części w odpowiednich miejscach (patrz rys. 2). Po piąte – trzeba to robić tak, żeby zachować kontrolę nad kształtem i topologią odcinanych fragmentów.



Rys. 2. Wąska rurka kurczy się szybciej niż pozostałe części rozmaitości. Aby zapobiec katastrofie, należy dokonać zapobiegawczej chirurgii: zawczasu wyciąć kolorową część rurki, a dwa otwory zalepić małymi czapeczkami. Rozdzielone części ewoluują dalej osobno.

Łatwo powiedzieć, trudniej zrobić. Hamilton zaproponował, żeby deformować metrykę z prędkością równą minus podwojonej krzywiznie Ricciego, tzn. na danej rozmaitości M budować taką rodzinę zależnych od czasu t metryk riemannowskich $g_{ij}(t)$, by

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g_{ij}(t) = -2R_{ij}(t),$$

gdzie $R_{ij}(t)$ jest tensorem Ricciego określonym przez metrykę w chwili t. Rodzina $g_{ij}(t)$ to właśnie *potok Ricciego*.

Czytelnik, który nie wie, co to jest metryka riemannowska i krzywizna Ricciego, nie powinien się przejmować, tylko przywołać przed oczy wyimaginowany obraz powyginanej przestrzennej siateczki do pomiaru odległości, pól i objętości, czegoś w rodzaju trójwymiarowego i powykrzywianego odpowiednika papieru milimetrowego (a jeszcze lepiej przezroczystej folii milimetrowej). Należy sobie wyobrazić, że owa siateczka ożywa i zaczyna się poruszać, płynnie zmieniając kształty. Prędkości są w różnych miejscach różne. Co się dzieje z odległościami? Aby odpowiedzieć na to pytanie, należy ustalić w przestrzeni punkt i kierunek, a następnie przeanalizować krzywiznę wszystkich niewielkich dwuwymiarowych „płatków” przestrzeni, które są w tym punkcie styczne do owego kierunku (w zwykłej przestrzeni euklidesowej byłby to pęk płaszczyzn). Jeśli wśród owych płatków przeważają takie, które wyglądają jak fragmenty powierzchni sfery czy elipsoidy, to odległość w danym kierunku się zmniejsza, gdy czas rośnie. Jeśli więcej jest płatków w kształcie siodeł, to odległość w danym kierunku rośnie wraz z upływem czasu.

Lokalnie, w tak zwanych normalnych układach współrzędnych, wygląda to *niemal* tak, jakby wszystkie współrzędne metryki spełniały, przy odpowiednim wyborze jednostek czasu, zwykłe równanie przewodnictwa cieplnego (patrz *Delta* 12/1998). *Niemal*, gdyż obecne jest nieliniowe zaburzenie, co sprawia, że z owego lokalnego obrazka nie można pochopnie wyciągać globalnych i dalekosiężnych wniosków. Wiadomo jednak, że równanie przewodnictwa cieplnego wygładza wszelkie początkowe nieregularności temperatury (jak się włoży dużą i mocną grzałkę do wiadra, to w końcu cała woda się zagotuje). Stąd nadzieja, że potok Ricciego pomaga nadawać wszelkim rozmaitościom porządną, regularną strukturę geometryczną.

Hamilton wykazał istnienie rozwiązań potoku Ricciego na małych przedziałach czasu. W wielu pracach powstałych w latach 1982–1997 opisał liczne własności tego potoku i jego zachowanie w rozmaitych szczególnych przypadkach. Nie udało mu się jednak opracować odpowiedniego systemu kontroli osobliwości ani wykluczyć pojawiania się osobliwości szczególnie niepożądanych, które w żargonie nazywa się cygarami, z tego względu, że fragment rozmaitości zaczyna wtedy wyglądać mniej więcej tak, jak produkt kartezjański okręgu i powierzchni szalenie długiego i cienkiego czubka cygara. A bez takiego systemu kontroli nie ma co marzyć o zapobiegawczych chirurgiach i o przedłużaniu potoku Ricciego poza osobliwości.

6. Cóż więc zrobił Perelman? Po pierwsze, korzystając z prac Hamiltona o łącznej objętości ponad 400 stron, skonstruował narzędzia, dzięki którym można dostrzegać i w pełni kontrolować nadchodzące osobliwości. Jest to skrajnie trudne dlatego, że osobliwości mogą narastać w różnym tempie, w różnych miejscach i w różnych skalach. Po drugie, opracował taką metodę wyboru chwil, w których dokonuje się zapobiegawczych chirurgii, że po skończonej liczbie cięć wzdłuż sfer i oddzieleniu od wyjściowej rozmaitości kawałków o ściśle kontrolowanych kształtach zostaje jeszcze „coś", w czym można wyróżnić części „grube" i części „cienkie", posklejane wzdłuż torusów $\mathbb{T}^2$. To „coś" może być wprawdzie bardzo zawiłe, ale jego strukturę eksperci od geometrii trójwymiarowych rozmaitości rozumieją na tyle dobrze, żeby dokładnie opisać wygląd części grubych i cienkich dla dużych czasów t. I to (podobno) już wystarczy...

Prace Perelmana są niezwykle bogate. Prócz ogromu wyobraźni geometrycznej są w nich oczywiście równania różniczkowe opisujące, jak z upływem czasu zmienia się metryka, krzywizna, objętości kul itp., jest masa nierówności całkowych, są analogie i intuicje czerpane z fizyki statystycznej, jest wreszcie pomysłowy funkcjonał entropii, który pozwala wykluczyć pojawianie się niepożądanych cygar. Wszyscy są zgodni, że nawet jeśli gdzieś znajdzie się jeszcze jakaś luka, która spowoduje, że hipoteza Thurstona i hipoteza Poincarégo pozostaną hipotezami, to i tak to, co już zostało sprawdzone, jest wielkim osiągnięciem.

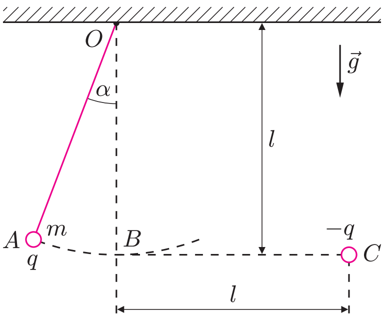
7. Uprawianie matematyki często porównuje się do chodzenia po wysokich górach. Nie jest to całkowicie pozbawione sensu, gdyż jedną z możliwych odpowiedzi na pytanie, dlaczego właściwie zajmować się hipotezą Poincarégo, jest odpowiedź moralnego zdobywcy Everestu, Mallory'ego: *w góry chodzi się dlatego, że są*.

Nie wiem, czy Perelman chodzi po górach. Przypomniała mi się jednak z tej okazji *Piosenka o górach* Włodzimierza Wysockiego, w której narrator, wszak również alpinista, miesza pokorę wobec majestatu gór i *śniegów tających imiona poległych* z nutką zawadiackiej dumy z przebytej właśnie nowej drogi. Nieudolnie kartkując wspomniane wyżej preprinty i liczne do nich uzupełnienia i komentarze, wielekroć myślałem, że Grisza Perelman miałby pełne prawo tę piosenkę nucić.

Zadania

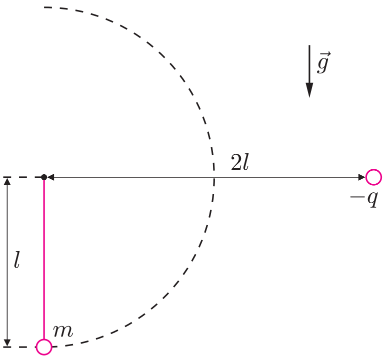
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 611. Wahadło OA składa się z cienkiego nieważkiego nieprzewodzącego pręta o długości l, do którego końca przymocowana jest kulka o masie m i ładunku q (rys. 1). Druga kulka o ładunku $-q$ jest umieszczona w punkcie C, przy czym odcinek OB ma długość l i jest pionowy, a odcinek BC ma taką samą długość i jest poziomy. Znaleźć siłę działającą na punkt zawieszenia wahadła w momencie przechodzenia kulki przez punkt B. W chwili początkowej prędkość pierwszej kulki była równa zeru, a pręt tworzył z pionem kąt $\alpha = 45°$. Przyspieszenie grawitacyjne jest równe $\vec{g}$.
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 1

F 612. Naładowana kulka o masie m i ładunku q jest zawieszona na nierozciągliwej nici o długości l (rys. 2). Na tej samej wysokości co punkt zawieszenia, w odległości $2l$ od niego, znajduje się ładunek $-q$. Znaleźć minimalną prędkość, którą powinna mieć w dolnym położeniu kulka, aby – poruszając się po okręgu – mogła dosięgnąć górnego punktu. Rozmiary kulki zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 12



Rys. 2

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1048. Jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^{n} |a_{i+1} - a_i|$, gdzie $a_{n+1} = a_1$, $n \geqslant 2$ oraz ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ jest permutacją zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$? Ile jest ciągów realizujących to minimum ?
Rozwiązanie na str. 5

M 1049. Środek okręgu opisanego na pięciokącie $A_1A_2A_3A_4A_5$ leży wewnątrz tego pięciokąta. Wykazać, że suma kątów przy wierzchołkach A_1 i A_3 jest mniejsza od $270°$.
Rozwiązanie na str. 16

M 1050. Czy istnieje figura płaska, która nie ma środka symetrii ani osi symetrii, taka że obrót względem pewnego punktu P o pewien kąt $0° < \alpha < 360°$ przeprowadza ją na nią samą?
Rozwiązanie na str. 16