

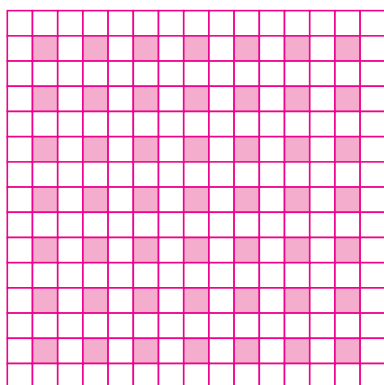
KOLOROWANKI – NUMEROWANKI (8)

Za punkt wyjścia dzisiejszych rozważań weźmy następujące zadanie.

Zadanie 1. Kwadrat o boku długości n dzielimy na n^2 kwadratów jednostkowych, zwanych dalej polami. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n , dla których wewnątrz kwadratu można umieścić rozłączne prostokąty o wymiarach 4×1 (oczywiście, w tego typu zadaniach zakładamy, że każdy prostokąt pokrywa 4 pola), tak aby każde pole nieleżące przy brzegu kwadratu zostało pokryte.

Innymi słowy, chcemy pokryć prostokątami 4×1 kwadrat o boku $n - 2$, dopuszczając, aby prostokąty trochę za ten kwadrat wystawały.

Jeżeli liczba n jest podzielna przez 4, to cały kwadrat o boku n możemy podzielić na prostokąty 4×1 . W przypadku, gdy



Rys. 1

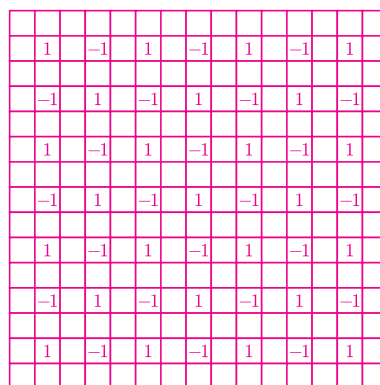
liczba n przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1 lub 2, to na prostokąty możemy podzielić kwadrat o boku odpowiednio $n-1$ lub $n-2$ i teza zadania jest, oczywiście, spełniona.

Pozostaje przypadek, gdy n przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Na potrzeby sporządzenia rysunku przyjmijmy $n = 15$.

Na rysunku 1 zamalowano nieparzystą liczbę pól w taki sposób, że każdy prostokąt 4×1 pokrywa dwa zamalowane pola lub nie pokrywa żadnego, jednym słowem pokrywa parzystą liczbę pól. Tak więc przy jakimkolwiek umieszczeniu rozłącznych prostokątów 4×1 wewnątrz kwadratu, niepokryte pozostanie co najmniej jedno zamalowane pole, a więc pole nieleżące przy brzegu.

Ten sam efekt można uzyskać, stosując numerację jak na rysunku 2, gdzie przyjmujemy, że w puste pola wpisana jest liczba 0. Wówczas każdy prostokąt 4×1 pokrywa 4 pola, w które wpisano liczby o sumie 0. Ponadto suma liczb wpisanych w pola kwadratu (czy to całego kwadratu o boku n , czy też zmniejszonego o boku $n-2$) jest równa 1, a zatem żądane w treści zadania rozmieszczenie prostokątów nie jest możliwe.

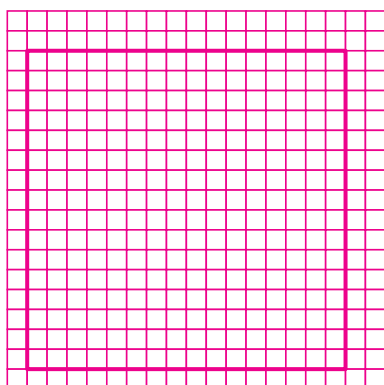
Czytelnik bez trudu rozwiąże przestrzenną wersję zadania, gdzie w sześcianie o krawędzi n chcemy rozmieścić prostopadłościennych klocek o wymiarach $4 \times 1 \times 1$.



Rys. 2

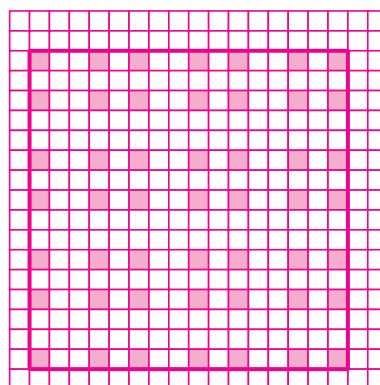
A teraz kolejne zadanie.

Zadanie 2. Kwadrat o boku długości 19 dzielimy na kwadraty jednostkowe. Wewnątrz kwadratu umieszczamy kwadrat o boku 16 jak na rysunku 3. Dowieść, że mniejszego kwadratu nie można pokryć rozłącznymi prostokątami o wymiarach 5×1 zawartymi w większym kwadracie.



Rys. 3

Rozwiązaniem zadania jest kolorowanie przedstawione na rysunku 4. Wnikliwy Czytelnik bez trudu uzupełni rysunek odpowiednim rozumowaniem.



Rys. 4

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl