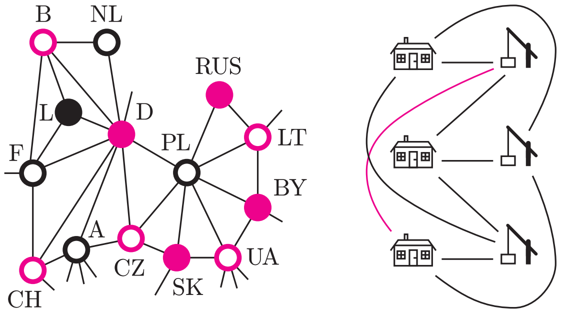
Zagadnienie czterech barw

Francis Guthrie, student z Londynu, wyraził w 1852 r. przypuszczenie, że państwa na dowolnej mapie – zarówno na płaszczyźnie, jak i na globusie – można za pomocą czterech barw pokolorować tak, żeby każde dwa państwa, mające wspólny odcinek granicy, miały różne kolory. (Przykład Luksemburga, Belgii, Francji i Niemiec pokazuje, że czwórki nie można zmniejszyć.) Do końca XIX w. problem stał się bardzo znany, m.in. za sprawą pomysłowych, lecz błędnych prób rozwiązania.

Aby uniknąć subtelności związanych z definiowaniem państw, granic itp., problem formułuje się równoważnie w języku teorii grafów. *Graf*, na nasze potrzeby, to skończona liczba kropek (*wierzchołków*) połączonych kreskami (*krawędziami*). Graf *planarny* to graf narysowany na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają. Graf jest *czterokolorowalny*, jeśli jego wierzchołki można pomalować czterema kolorami w taki sposób, by każda krawędź miała końce różnych kolorów.

Zagadnienie czterech barw to pytanie: Czy każdy graf planarny jest czterokolorowalny?

Twierdzącej odpowiedzi udzielili w 1976 roku K. Appel i W. Haken. Ich dowód liczył ponad 130 stron druku i 400 stron mikrofilmów z tysiącami rysunków; co więcej, liczne fakty zostały sprawdzone za pomocą wieluset godzin pracy komputera. W latach 90. XX w. N. Robertson, P. Seymour, D. Sanders i R. Thomas rozpoczęli wszechstronne niezależne sprawdzanie dowodu Appela i Hakena – i zniechęceni ogromem niezbędnego wysiłku programistycznego postanowili, że spróbują podać inny, własny dowód. Zamiar się powiódł; nowy dowód, opublikowany w 1997 r., ma 40 stron elementarnego tekstu; nadal wprawdzie dowody dwóch lematów wymagają użycia komputera, jest ono jednak znacznie skromniejsze niż w pracy Appela i Hakena (i dostarcza szybszego algorytmu kolorowania grafów).



(a) Graf planarny (fragment mapy Europy; kropki oznaczają państwa, kreski zaś – wspólne granice).

(b) Graf niespłaszczalny (nie można go narysować tak, żeby był planarny).

Dowód Robertsona, Seymoura, Sandersa i Thomasa został niezależnie sprawdzony (łącznie z napisaniem od nowa programów niezbędnych w jego komputerowej części). Klasycznego dowodu wciąż jednak nie znamy.

Więcej na podobne tematy w *Deltach*: 5/1977, 5/1997, 4/1999, na stronie www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html oraz w książce R. Wilsona *Four colors suffice. How the map problem was solved* (wyd. Princeton University Press, 2002).

Paweł STRZELECKI

Falki

Gdy dana jest funkcja $f(x)$ (dla ustalenia uwagi będziemy przyjmować, że wszystkie funkcje określone są na całej prostej rzeczywistej), to często chcielibyśmy ją przedstawić jako sumę

$$f = \sum_k a_k F_k,$$

gdzie a_k to pewne współczynniki liczbowe, a F_k to ustalona rodzina „prostych” funkcji. Chcemy przy tym (ze względów praktycznych), aby już skończona suma dobrze przybliżała naszą funkcję f.

W praktycznych zastosowaniach f może być wykresem EKG lub drgań sejsmicznych, zapisem dźwięku itp. Jeśli f jest funkcją dwu zmiennych, to może ona reprezentować obraz.

Powstaje kilka istotnych problemów, np.

1) Jak obliczyć współczynniki a_k?

2) Jak znaleźć skończoną sumę, która dobrze przybliża f?

3) I co to znaczy: *dobrze* przybliża?

Oczywiście, rozwiązania powyższych problemów zależą od wybranej rodziny funkcji F_k.

W zasadzie odpowiedź na pytanie 1 znana jest od co najmniej 200 lat: układ F_k powinien być ortonormalny, co znaczy, że

$$\int F_k(x) F_l(x) \mathrm{d}x$$

równa się 0, gdy $k \neq l$, i 1, gdy $k = l$ – to pozwala już obliczyć a_k (aby było $f = \sum_k a_k F_k$, potrzeba jeszcze, by układ spełniał pewien warunek, zwany zupełnością, ale to można zapewnić).

Otóż falki są to pewne specjalne funkcje, które łatwo generują takie układy ortonormalne, że można poradzić sobie z problemami 2) i 3).

Funkcję Φ nazywamy falką, jeśli układ funkcji $\Phi_{j,k}$, określony jako

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \Phi(2^j x - k),$$

gdzie j i k przebiegają wszystkie liczby całkowite, jest układem ortonormalnym i zupełnym.