oraz Maciej Konacki (który za pomocą obserwacji spektroskopowych wykazał, że w przypadku jednej z tych gwiazd obiektem odpowiedzialnym za zmiany blasku jest rzeczywiście planeta).

Odkrywane obecnie układy pozasłoneczne są zupełnie niepodobne do naszego. Aż 70% znajdujących się w nich planet ma orbity spłaszczone znacznie silniej, niż większość planet słonecznych, ponad 50% krąży bliżej swych gwiazd niż Merkury Słońca. Ponadto przy kilku gwiazdach znaleziono planety-giganty o masie ponad dziesięciokrotnie większej od masy Jowisza. Niezwykłe cechy tych układów próbuje się objaśnić skomplikowanymi oddziaływaniami, jakie zachodziły między formującymi się planetami i dyskami protoplanetarnymi (w ich wyniku planeta mogła m.in. przemieszczać się z pierwotnej orbity na orbitę położoną znacznie bliżej gwiazdy). Spójnej teorii opisującej powstawanie układów krańcowo różnych od słonecznego na razie nie ma. Wiadomo jedynie, że są nieliczne – występują tylko u około 5% gwiazd podobnych do Słońca. Znaczna część pozostałych 95% może posiadać układy podobne do słonecznego, w których blisko gwiazdy krążą planety o niewielkich rozmiarach. Czy tak jest rzeczywiście, przekonamy się za kilka lat, gdy rozpoczną prace konstruowane obecnie teleskopy orbitalne przeznaczone do wykrywania planet ziemiopodobnych.

Michał RÓŻYCZKA

Wzór Blacka–Scholesa

Matematyczny model rynku finansowego, zwany w literaturze modelem Blacka–Scholesa, powstał w wyniku wieloletnich prac wielu autorów jako naturalna formalizacja i idealizacja rzeczywistych rynków. Jednak powszechną akceptację zyskał dopiero po pierwszym spektakularnym sukcesie, jakim był wzór Blacka–Scholesa na cenę opcji europejskiej.

Opcja europejska jest kontraktem, który swemu posiadaczowi daje prawo (ale nie obowiązek) kupienia (lub sprzedania) akcji w ustalonej chwili w przyszłości (termin realizacji) po ustalonej cenie (cena realizacji).

Za badania te Myron Scholes wraz z Robertem Mertonem otrzymali w 1997 roku nagrodę Nobla z ekonomii, Fisher Black zmarł dwa lata wcześniej, ale według powszechnej opinii, gdyby żył, byłby trzecim laureatem tej nagrody.

W modelu rynku finansowego ceny akcji są opisane przez procesy stochastyczne, a celem modelowania jest znalezienie cen opcji na akcje. W podejściu Blacka i Scholesa kluczowe okazały się dwa założenia. Po pierwsze, że na rynku finansowym znajdującym się w stanie równowagi nie istnieje możliwość generowania pewnego zysku z zerowego kapitału, czyli jeśli istnieje strategia inwestycyjna, która może przynieść zysk, nawet gdy zaczynamy inwestycje bez żadnych środków, to strategia taka musi być obarczona ryzykiem poniesienia strat.

Drugim kluczowym założeniem modelu Blacka–Scholesa jest wybór klasy procesów stochastycznych, które opisują ceny akcji. Od dawna znany był chaotyczny charakter cen instrumentów giełdowych. Jednak dopiero w latach sześćdziesiątych XX w. znaleziono właściwe matematyczne sformułowanie tego zjawiska: względne zmiany cen są opisywane procesem Wienera z dryfem (często w literaturze mówi się, że ceny podlegają geometrycznemu procesowi Wienera).

Połączenie powyższych dwóch elementów umożliwiło Blackowi i Scholesowi napisanie równania różniczkowego, które spełnia cena opcji europejskiej (równanie Blacka–Scholesa).

Równanie Blacka-Scholesa na cenę $F(t,s)$ opcji:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0$$

z warunkiem końcowym $F(T,x) = H(x)$. W równaniu tym t oznacza czas, a T jest czasem realizacji opcji (interesuje nas znalezienie rozwiązania tylko dla $t < T$). Zmienna x oznacza cenę akcji, a $H(x)$ funkcję wypłaty z opcji w chwili T, stała σ^2 jest wariancją procesu opisującego ceny akcji, a r stałą stopą procentową.

Dwie rzeczy są niezwykłe w tym równaniu. Po pierwsze, nie występuje w nim współczynnik dryfu procesu Wienera. Ponieważ współczynnik ten opisuje średni zysk z akcji, oznacza to, że dobrą cenę opcji można wyznaczyć bez wiedzy o tym, czy akcje przynoszą zysk, czy stratę. Po drugie, równanie można rozwiązać analitycznie (prowadzi to do wzoru Blacka–Scholesa), co nie jest częstym zjawiskiem dla równań różniczkowych cząstkowych. Odegrało to bardzo ważną rolę w rozwoju rynku instrumentów pochodnych w epoce przedkomputerowej (komputery w tym czasie były dostępne tylko dla dużych i bogatych instytucji, a praca na nich wymagała specjalistycznych umiejętności programistycznych).

Dla europejskiej opcji kupna akcji S za cenę K w chwili T, odpowiadającej wypłacie

$$H(S(T)) = \max(S(T) - K, 0),$$

zachodzi następujący wzór na cenę opcji w chwili 0:

$$F(0,S(0)) = S(0)N(d_1(S(0),T)) - Ke^{-r(T)}N(d_2(S(0),T)),$$

gdzie $N(x)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego, a

$$d_1(S,T) = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2(S,T) = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Andrzej PALCZEWSKI