Klasyfikacja skończonych grup prostych

Wszystkie izometrie płaszczyzny nakładające ustaloną figurę na siebie tworzą zbiór przekształceń, zamknięty ze względu na składanie i odwracanie. Zbiór ten, zwany grupą symetrii własnych figury, mierzy symetryczność: figurę bardzo symetryczną można nakładać na siebie na wiele różnych sposobów.

Już w XIX wieku zauważono, że tak samo można mierzyć symetryczność dowolnych obiektów matematycznych (wielomianów, systemów liczbowych itd). Doprowadziło to do powstania pojęcia abstrakcyjnej grupy: jest to zbiór G wyposażony w łączne mnożenie (odpowiednik składania przekształceń). Ponadto każda grupa powinna mieć element neutralny, każdy zaś element $g \in G$ – odwrotność $g^{-1} \in G$.

W skończonym zbiorze można wprowadzić takie mnożenie na skończenie wiele sposobów – teoretycznie istnieje więc możliwość sporządzenia pełnej listy grup o co najwyżej n elementach. W praktyce jest to niewykonalne; znamy interesujące grupy o setkach tysięcy elementów, podczas gdy różnych grup dla $n \leqslant 2000$ jest już blisko 5 miliardów!

Istnieje inny, bardziej efektywny sposób klasyfikowania grup skończonych. Jeśli $H \subset G$ jest podgrupą G, to zbiór G można rozłożyć na parami rozłączne podzbiory (warstwy) $G = H_1 \cup \ldots \cup H_m$: elementy $x, y \in G$ zaliczymy do tej samej warstwy, gdy $xy^{-1} \in H$. Warstwy te można mnożyć w następujący sposób: aby obliczyć $H_i \cdot H_j$ bierzemy dowolne $x \in H_i$, $y \in H_j$. Wtedy $x \cdot y$ leży w jednej z warstw H_k, więc definiujemy $H_i \cdot H_j = H_k$. Podgrupę $H \subset G$ nazywamy *normalną*, jeśli ta definicja jest poprawna, tj. wynik mnożenia nie zależy od wyboru x, y. Wtedy zbiór warstw wraz z tym mnożeniem tworzy m-elementową grupę, oznaczaną przez G/H. Jeśli $1 < |H| < |G|$, to opis grupy G redukuje się do opisu *mniejszych* grup: H oraz G/H.

Pozostaje opisać grupy skończone bez właściwych podgrup normalnych, czyli tzw. *grupy proste*.
W roku 1984 ogłoszono zakończenie procesu ich klasyfikacji. Było to przedsięwzięcie bez precedensu: kompletowanie listy grup prostych zajęło ponad 30 lat, a wyniki tych badań są opisane w około 500 pracach naukowych kilkuset autorów, zajmujących w sumie prawie 10 000 stron druku!

Jaka wygląda ta lista? Bez dalszych wyjaśnień, wyliczmy. Każda skończona grupa prosta albo należy do jednej z trzech, znanych od dawna, nieskończonych rodzin grup „klasycznych”:

1) grupy cykliczne C_n, gdzie n jest liczbą pierwszą,

2) grupy A_n permutacji parzystych,

3) grupy „typu Lie” nad ciałami skończonymi,

albo jest jedną z 26 grup sporadycznych: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, J_4, HS, Mc, Suz, Ru, He, Ly, ON, .1, .2, .3, $M(22)$, $M(23)$, $M(24)'$, F_5, F_3, F_2, F_1.

Grupy sporadyczne wypisane są tu w porządku rosnącym; największa z nich – grupa Fishera F_1 – ma $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \approx 10^{54}$ elementów.

Zbigniew MARCINIAK

Pozasłoneczne układy planetarne

Pierwszy pozasłoneczny układ planetarny został odkryty w 1992 roku przez Aleksandra Wolszczana. Jego obiektem centralnym jest gwiazda neutronowa – obiekt o rozmiarach niewielkiej planetoidy i masie porównywalnej z masą Słońca, który zamiast światła widzialnego emituje fale radiowe, promienie rentgenowskie i wysokoenergetyczne cząstki elementarne. Taki obiekt powstaje podczas wybuchu supernowej – potężnej eksplozji kończącej życie gwiazdy o masie co najmniej dziesięciokrotnie większej od masy Słońca. Ponieważ supernowa na pewno zniszczyłaby lub odrzuciła okrążające ją planety, układ Wolszczana musiał powstać już po wybuchu. Prawdopodobnie supernowa miała niewielkiego gwiazdowego towarzysza, który „przeżył” wybuch i powoli „parował” pod działaniem strumieni cząstek elementarnych, przy czym część traconej przez niego materii utworzyła cienki dysk otaczający gwiazdę neutronową. Warunki panujące w takim dysku mogły sprzyjać formowaniu się planet.

Kolejną przełomową datą w historii pozasłonecznych układów planetarnych jest rok 1995, w którym Michel Mayor i Didier Queloz znaleźli planetę przy zwykłej gwieździe podobnej do Słońca. Od tej pory doniesienia o odkryciu kolejnych układów planetarnych pojawiają się średnio raz na miesiąc, a liczba znanych planet krążących wokół innych słońc przekroczyła już setkę. Większości odkryć dokonano metodą spektroskopową, obserwując efekt Dopplera związany z drobnymi ruchami gwiazdy wokół środka masy układu planetarnego. Współczesne spektrografy mierzą prędkość radialną z dokładnością 1 m/s, co w Układzie Słonecznym oglądanym z zewnątrz umożliwiłoby wykrycie obecności Saturna (pod warunkiem, że obserwacje byłyby prowadzone przez co najmniej 30 lat – tyle, ile wynosi okres orbitalny Saturna).

Ostatnio coraz większe znaczenie zdobywa metoda fotometryczna, w której poszukuje się tzw. tranzytów – nieznacznych „przygaśnięć” gwiazdy spowodowanych zakryciem części jej tarczy przez okrążający ją obiekt. Pionierami tej metody są Andrzej Udalski (który zaobserwował tranzyty i wytypował szereg gwiazd „podejrzanych” o posiadanie układów planetarnych) oraz Maciej Konacki (który za pomocą obserwacji spektroskopowych wykazał, że w przypadku jednej z tych gwiazd obiektem odpowiedzialnym za zmiany blasku jest rzeczywiście planeta).

Odkrywane obecnie układy pozasłoneczne są zupełnie niepodobne do naszego. Aż 70% znajdujących się w nich planet ma orbity spłaszczone znacznie silniej, niż większość planet słonecznych, ponad 50% krąży bliżej swych gwiazd niż Merkury Słońca. Ponadto przy kilku gwiazdach znaleziono planety-giganty o masie ponad dziesięciokrotnie większej od masy Jowisza. Niezwykłe cechy tych układów próbuje się objaśnić skomplikowanymi oddziaływaniami, jakie zachodziły między formującymi się planetami i dyskami protoplanetarnymi (w ich wyniku planeta mogła m.in. przemieszczać się z pierwotnej orbity na orbitę położoną znacznie bliżej gwiazdy). Spójnej teorii opisującej powstawanie układów krańcowo różnych od słonecznego na razie nie ma. Wiadomo jedynie, że są nieliczne – występują tylko u około 5% gwiazd podobnych do Słońca. Znaczna część pozostałych 95% może posiadać układy podobne do słonecznego, w których blisko gwiazdy krążą planety o niewielkich rozmiarach. Czy tak jest rzeczywiście, przekonamy się za kilka lat, gdy rozpoczną prace konstruowane obecnie teleskopy orbitalne przeznaczone do wykrywania planet ziemiopodobnych.

Michał RÓŻYCZKA

Wzór Blacka–Scholesa

Matematyczny model rynku finansowego, zwany w literaturze modelem Blacka–Scholesa, powstał w wyniku wieloletnich prac wielu autorów jako naturalna formalizacja i idealizacja rzeczywistych rynków. Jednak powszechną akceptację zyskał dopiero po pierwszym spektakularnym sukcesie, jakim był wzór Blacka–Scholesa na cenę opcji europejskiej.

Opcja europejska jest kontraktem, który swemu posiadaczowi daje prawo (ale nie obowiązek) kupienia (lub sprzedania) akcji w ustalonej chwili w przyszłości (termin realizacji) po ustalonej cenie (cena realizacji).

Za badania te Myron Scholes wraz z Robertem Mertonem otrzymali w 1997 roku nagrodę Nobla z ekonomii, Fisher Black zmarł dwa lata wcześniej, ale według powszechnej opinii, gdyby żył, byłby trzecim laureatem tej nagrody.

W modelu rynku finansowego ceny akcji są opisane przez procesy stochastyczne, a celem modelowania jest znalezienie cen opcji na akcje. W podejściu Blacka i Scholesa kluczowe okazały się dwa założenia. Po pierwsze, że na rynku finansowym znajdującym się w stanie równowagi nie istnieje możliwość generowania pewnego zysku z zerowego kapitału, czyli jeśli istnieje strategia inwestycyjna, która może przynieść zysk, nawet gdy zaczynamy inwestycje bez żadnych środków, to strategia taka musi być obarczona ryzykiem poniesienia strat.

Drugim kluczowym założeniem modelu Blacka–Scholesa jest wybór klasy procesów stochastycznych, które opisują ceny akcji. Od dawna znany był chaotyczny charakter cen instrumentów giełdowych. Jednak dopiero w latach sześćdziesiątych XX w. znaleziono właściwe matematyczne sformułowanie tego zjawiska: względne zmiany cen są opisywane procesem Wienera z dryfem (często w literaturze mówi się, że ceny podlegają geometrycznemu procesowi Wienera).

Połączenie powyższych dwóch elementów umożliwiło Blackowi i Scholesowi napisanie równania różniczkowego, które spełnia cena opcji europejskiej (równanie Blacka–Scholesa).

Równanie Blacka-Scholesa na cenę $F(t,s)$ opcji:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) - rF(t,x) = 0$$

z warunkiem końcowym $F(T,x) = H(x)$. W równaniu tym t oznacza czas, a T jest czasem realizacji opcji (interesuje nas znalezienie rozwiązania tylko dla $t < T$). Zmienna x oznacza cenę akcji, a $H(x)$ funkcję wypłaty z opcji w chwili T, stała σ^2 jest wariancją procesu opisującego ceny akcji, a r stałą stopą procentową.

Dwie rzeczy są niezwykłe w tym równaniu. Po pierwsze, nie występuje w nim współczynnik dryfu procesu Wienera. Ponieważ współczynnik ten opisuje średni zysk z akcji, oznacza to, że dobrą cenę opcji można wyznaczyć bez wiedzy o tym, czy akcje przynoszą zysk, czy stratę. Po drugie, równanie można rozwiązać analitycznie (prowadzi to do wzoru Blacka–Scholesa), co nie jest częstym zjawiskiem dla równań różniczkowych cząstkowych. Odegrało to bardzo ważną rolę w rozwoju rynku instrumentów pochodnych w epoce przedkomputerowej (komputery w tym czasie były dostępne tylko dla dużych i bogatych instytucji, a praca na nich wymagała specjalistycznych umiejętności programistycznych).

Dla europejskiej opcji kupna akcji S za cenę K w chwili T, odpowiadającej wypłacie

$$H(S(T)) = \max(S(T) - K, 0),$$

zachodzi następujący wzór na cenę opcji w chwili 0:

$$F(0,S(0)) = S(0)N(d_1(S(0),T)) - Ke^{-r(T)}N(d_2(S(0),T)),$$

gdzie $N(x)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego, a

$$d_1(S,T) = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2(S,T) = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Andrzej PALCZEWSKI