Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Termin nadsyłania rozwiązań:
29 II 2004

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
459 ($WT = 1{,}71$) i **460** ($WT = 1{,}86$)
z numeru 4/2003

Michał Adamaszek	– Kęty	39,76
Paweł Najman	– Jaworzno	37,80
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	37,40
Michał Jóźwikowski	– Błonie	36,70
Paweł Kubit	– Kraków	35,39
Zbigniew Sewartowski	– Wieliczka	34,15

Zadania z matematyki nr 471, 472

Redaguje Marcin E. KUCZMA

471. Wyznaczyć wszystkie rzeczywiste pierwiastki równania
$$(x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1) = 210\,x^5.$$

472. Czy istnieje nieskończony ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, a_3, \ldots$ taki, że szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny, a szereg $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots$ jest rozbieżny?

Zadanie 472 zaproponował pan Michał Jóźwikowski z Błonia.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
29 II 2004

Zadania z fizyki nr 368, 369

Redaguje Jerzy B. BROJAN

368. Dyzio strasznie dzisiaj dokazywał, gdy wyszedł na spacer na zewnątrz stacji kosmicznej krążącej wokół Ziemi. Zamiast pilnować swojej piłki, rzucił ją gdzieś i zanim ktokolwiek się zorientował, już jej nie było. „Dyziu, nie zaśmiecaj Kosmosu,” – upomniał go tata – „każdy swobodnie lecący przedmiot może być przyczyną katastrofy innych stacji!”. „Jak to dobrze, że przynajmniej nam nic z tego powodu nie grozi!” – odpowiedział niegrzeczny chłopiec. „Żałuję tylko, że mi zginęła, będę się rozglądał, czy kiedyś nie przeleci obok, może ją złapię”.

Czy piłka może w przyszłości stanowić zagrożenie dla tej stacji? Czy Dyzio ma realną szansę ją odzyskać? Zakładamy, że stacja i piłka poruszają się tylko pod wpływem grawitacji ziemskiej, a Ziemia przyciąga tak, jak punkt materialny. Rozważyć przypadki stacji poruszającej się po orbicie kołowej i eliptycznej.

369. Silnik rakietowy spala łącznie 100 g wodoru i tlenu na sekundę, a temperatura w komorze spalania wynosi 1000 K. Obliczyć przybliżoną wartość siły ciągu silnika.

Rozwiązanie zadania M 1045.

Odnotujmy, że $0 < f_n(x) < 1$ dla $x \in (0,1)$. Dowodzimy jednocześnie, że dla $n \in \mathbb{N}$

(1) $$\exists_{0<\delta_n<1} f_{2n-1}(x) < x^{\frac12} \quad \text{dla } x \in (0, \delta_n),$$

(2) $$\lim_{x\to 0^+} f_{2n}(x) = 1.$$

Dla $n = 1$: $x < \sqrt{x}$ dla $x \in (0,1)$, skąd (1). Ponadto $x^x = e^{x\ln x}$, skąd (2), gdyż $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$. Z założenia indukcyjnego wynika, że $f_{2n}(x) > \frac12$ dla $x \in (0, \delta_{n+1})$ i pewnego $0 < \delta_{n+1} < 1$. Zatem
$$f_{2n+1}(x) = x^{f_{2n}(x)} < x^{\frac12}$$
dla $0 < x < \delta_{n+1} < 1$. Ponadto, z powyższej nierówności wynika, że
$$f_{2n+2}(x) = x^{f_{2n+1}(x)} > x^{x^{\frac12}} = e^{x^{\frac12}\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1,$$
gdyż $x^{\frac12}\ln x = 2x^{\frac12}\ln x^{\frac12} \to 0$. To kończy dowód indukcyjny. Oczywiście (1) implikuje, że $\lim_{x\to 0^+} f_{2003}(x) = 0$.

Rozwiązanie zadania M 1046.

Niech $\{x\} = x - [x]$. Mamy
$$n \leqslant \frac{1}{\{x\}} < n+1,$$
skąd
$$\frac{1}{n+1} < \{x\} \leqslant \frac{1}{n}.$$
Zatem
$$n - 1 = \frac{n^2-1}{n+1} < (n^2-1)\{x\} \leqslant \frac{n^2-1}{n} = n - \frac{1}{n} < n.$$
Dodając stronami $(n^2-1)[x]$ otrzymamy
$$n - 1 + k(n+1) < (n^2-1)x < n + k(n+1)$$
dla pewnej liczby całkowitej k. Zatem
$$[(n^2-1)x] = n - 1 + k(n+1),$$
co dowodzi tezy.