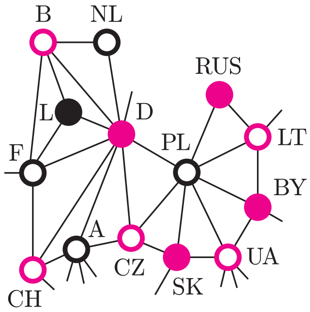
Zagadnienie czterech barw

Francis Guthrie, student z Londynu, wyraził w 1852 r. przypuszczenie, że państwa na dowolnej mapie – zarówno na płaszczyźnie, jak i na globusie – można za pomocą czterech barw pokolorować tak, żeby każde dwa państwa, mające wspólny odcinek granicy, miały różne kolory. (Przykład Luksemburga, Belgii, Francji i Niemiec pokazuje, że czwórki nie można zmniejszyć.) Do końca XIX w. problem stał się bardzo znany, m.in. za sprawą pomysłowych, lecz błędnych prób rozwiązania.

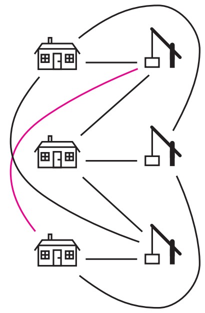
Aby uniknąć subtelności związanych z definiowaniem państw, granic itp., problem formułuje się równoważnie w języku teorii grafów. *Graf*, na nasze potrzeby, to skończona liczba kropek (*wierzchołków*) połączonych kreskami (*krawędziami*). Graf *planarny* to graf narysowany na płaszczyźnie w taki sposób, że żadne dwie krawędzie się nie przecinają. Graf jest *czterokolorowalny*, jeśli jego wierzchołki można pomalować czterema kolorami w taki sposób, by każda krawędź miała końce różnych kolorów.

Zagadnienie czterech barw to pytanie: Czy każdy graf planarny jest czterokolorowalny?

Twierdzącej odpowiedzi udzielili w 1976 roku K. Appel i W. Haken. Ich dowód liczył ponad 130 stron druku i 400 stron mikrofilmów z tysiącami rysunków; co więcej, liczne fakty zostały sprawdzone za pomocą wieluset godzin pracy komputera. W latach 90. XX w. N. Robertson, P. Seymour, D. Sanders i R. Thomas rozpoczęli wszechstronne niezależne sprawdzanie dowodu Appela i Hakena – i zniechęceni ogromem niezbędnego wysiłku programistycznego postanowili, że spróbują podać inny, własny dowód. Zamiar się powiódł; nowy dowód, opublikowany w 1997 r., ma 40 stron elementarnego tekstu; nadal wprawdzie dowody dwóch lematów wymagają użycia komputera, jest ono jednak znacznie skromniejsze niż w pracy Appela i Hakena (i dostarcza szybszego algorytmu kolorowania grafów).



(a) Graf planarny (fragment mapy Europy; kropki oznaczają państwa, kreski zaś – wspólne granice).



(b) Graf niespłaszczalny (nie można go narysować tak, żeby był planarny).

Dowód Robertsona, Seymoura, Sandersa i Thomasa został niezależnie sprawdzony (łącznie z napisaniem od nowa programów niezbędnych w jego komputerowej części). Klasycznego dowodu wciąż jednak nie znamy.

Więcej na podobne tematy w *Deltach*: 5/1977, 5/1997, 4/1999, na stronie www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html oraz w książce R. Wilsona *Four colors suffice. How the map problem was solved* (wyd. Princeton University Press, 2002).

Paweł STRZELECKI

Falki

Gdy dana jest funkcja $f(x)$ (dla ustalenia uwagi będziemy przyjmować, że wszystkie funkcje określone są na całej prostej rzeczywistej), to często chcielibyśmy ją przedstawić jako sumę

$$f = \sum_k a_k F_k,$$

gdzie a_k to pewne współczynniki liczbowe, a F_k to ustalona rodzina „prostych" funkcji. Chcemy przy tym (ze względów praktycznych), aby już skończona suma dobrze przybliżała naszą funkcję f.

W praktycznych zastosowaniach f może być wykresem EKG lub drgań sejsmicznych, zapisem dźwięku itp. Jeśli f jest funkcją dwu zmiennych, to może ona reprezentować obraz.

Powstaje kilka istotnych problemów, np.

1) Jak obliczyć współczynniki a_k?

2) Jak znaleźć skończoną sumę, która dobrze przybliża f?

3) I co to znaczy: *dobrze* przybliża?

Oczywiście, rozwiązania powyższych problemów zależą od wybranej rodziny funkcji F_k.

W zasadzie odpowiedź na pytanie 1 znana jest od co najmniej 200 lat: układ F_k powinien być ortonormalny, co znaczy, że

$$\int F_k(x)F_l(x)\mathrm{d}x$$

równa się 0, gdy $k \neq l$, i 1, gdy $k = l$ – to pozwala już obliczyć a_k (aby było $f = \sum_k a_k F_k$, potrzeba jeszcze, by układ spełniał pewien warunek, zwany zupełnością, ale to można zapewnić).

Otóż falki są to pewne specjalne funkcje, które łatwo generują takie układy ortonormalne, że można poradzić sobie z problemami 2) i 3).

Funkcję Φ nazywamy falką, jeśli układ funkcji $\Phi_{j,k}$, określony jako

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\Phi(2^j x - k),$$

gdzie j i k przebiegają wszystkie liczby całkowite, jest układem ortonormalnym i zupełnym.

Pierwszą falkę zbudował prawie sto lat temu węgierski matematyk A. Haar. Oto ona

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x < 1/2 \\ -1 & \text{dla } 1/2 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Z definicji natychmiast wynika, że funkcja $h_{j,k}$ jest zerem poza odcinkiem $[2^{-j}k,\ 2^{-j}(k+1)]$, wobec tego współczynnik $a_{j,k}$ zależy tylko od wartości, jakie funkcja f przyjmuje na tym odcinku. Oczywiście funkcje $a_{j,k}h_{j,k}$, jak i ich skończone sumy, są nieciągłe.

Następne falki skonstruował w 1981 roku szwedzki matematyk Jan-Olov Strömberg. Jego falki były już ciągłe, a nawet miały kilka pochodnych. Gdzieś około 1986 roku matematyk francuski, Yves Meyer, skonstruował następne falki i stworzył ogólną teorię. Najczęściej nie istnieje zwarta formuła definiująca falkę, natomiast często istnieją efektywne rekurencyjne algorytmy pozwalające obliczać zarówno falkę, jak i współczynniki $a_{j,k}$.

Co do problemu 3), to praktyczną regułą jest, że dla dobrej falki skończone sumy szeregu $\sum_k a_{j,k}h_{j,k}(x)$ przybliżają funkcję f dla wszystkich sposobów obliczania odległości między funkcjami. Na pytanie 2) bardzo często dobra jest odpowiedź najprostsza: do sumy wybierz składniki, w których współczynniki są największe.

Przemysław WOJTASZCZYK

Stała kosmologiczna

Zaraz po sformułowaniu ogólnej teorii względności w 1916 roku Albert Einstein postanowił zastosować ją do opisu największego istniejącego układu fizycznego – całego Wszechświata. W 1916 roku astronomowie nie wiedzieli jeszcze o tym, że istnieją inne galaktyki i cały Wszechświat utożsamiali z Drogą Mleczną – ogromnym dyskopodobnym skupiskiem gwiazd, które powoli krążą wokół jej centrum. Astronomowie nie byli też pewni, czy gwiazdy wypełniają całą przestrzeń, czy też są skupione w obszarze Drogi Mlecznej, a poza nią istnieje tylko pusta przestrzeń. W obu jednak przypadkach uważano, że rozkład gwiazd jest stacjonarny, a przestrzeń jest statyczna. Einstein szybko przekonał się, że równania ogólnej teorii względności nie mogą opisać takiego statycznego wszechświata. Zawierzając astronomicznej wizji Wszechświata Einstein zmodyfikował swoje równania dodając do nich dodatkowy człon – stałą kosmologiczną, który opisywał stałą siłę równoważącą siłę grawitacyjnego przyciągania między gwiazdami. Zakładając, że Wszechświat jest statyczny i ma stałą dodatnią krzywiznę, a więc ma skończoną objętość, Einstein wyprowadził zależność między promieniem krzywizny a średnią gęstością materii we Wszechświecie oraz wyznaczył wartość stałej kosmologicznej. Einstein był bardzo dumny ze swojego modelu Wszechświata. W 1917 roku pisał do M. Grossmanna: *jestem w stanie wewnętrznej euforii. Okazało się, ze moja ogólna teoria względności jest kluczem do zrozumienia całego Wszechświata. Gdy tylko astronomowie zmierzą średnią gęstość Wszechświata, będę mógł im powiedzieć, jaki jest on duży.* Euforia Einsteina nie trwała zbyt długo. W 1923 roku Edwin Hubble odkrył, że tak zwane mgławice spiralne, uważane za świecące obłoki gazu, są ogromnymi skupiskami gwiazd – galaktykami – położonymi daleko poza granicami Drogi Mlecznej. Sześć lat później Hubble wykazał, że galaktyki oddalają się od nas z prędkością proporcjonalną do ich odległości. Statyczny model Wszechświata legł w gruzach, a wraz z nim koncepcja stałej kosmologicznej. Wiele lat później Einstein przyznał, że wprowadzenie stałej kosmologicznej było największą pomyłką w jego życiu.

Choć statyczny model Wszechświata odszedł w zapomnienie, nie zapomniano o stałej kosmologicznej. Oto w telegraficznym skrócie dalsze jej losy. O stałej kosmologicznej przypomniano sobie przy pierwszych próbach kwantowania pola grawitacyjnego. W kwantowej teorii pola stan próżni nie musi i wręcz nie może mieć energii dokładnie równej zero. W mechanice kwantowej i klasycznej nie stanowi to problemu, gdyż istotne są jedynie różnice energii. W ogólnej teorii względności natomiast każda postać energii zakrzywia przestrzeń. Energię próżni kojarzono ze stałą kosmologiczną głównie z powodu podobnych praw transformacyjnych. Proste oszacowania pokazują jednak, że gęstość energii próżni o ponad sto rzędów wielkości przewyższa kosmologicznie akceptowalne ograniczenia na wartość stałej kosmologicznej. Do tej pory nie znaleziono zadowalającego rozwiązania tego problemu.

Mniej więcej dziesięć lat temu do pomiaru tempa rozszerzania się Wszechświata astronomowie zaczęli wykorzystywać supernowe typu Ia (są to wybuchające białe karły w układach podwójnych, które powiększyły swoją masę kosztem masy towarzysza ponad dopuszczalną granicę). Z obserwacji dalekich supernowych wynika, że obecnie Wszechświat rozszerza się coraz szybciej zamiast coraz wolniej, tak jak powinien, gdyby zawierał jedynie zwykłą materię. Ten niespodziewany wynik obserwacyjny można wyjaśnić zakładając, że obecnie gęstość energii-materii we Wszechświecie jest zdominowana przez „ciemną energię” lub stałą kosmologiczną. Ten bardzo ważny wynik został ostatnio potwierdzony przez satelitę WMAP, który mierzy anizotropię temperatury promieniowania reliktowego. Okazało się, że obecnie Wszechświat składa się w 73% z ciemnej energii, w 23% z ciemnej egzotycznej materii, natomiast zwykła materia stanowi zaledwie 4% średniej gęstości materii (energii). Wyjaśnienie natury ciemnej energii (stałej kosmologicznej) i ciemnej materii jest wielkim wyzwaniem dla kosmologii i fizyki cząstek elementarnych.

Marek DEMIAŃSKI