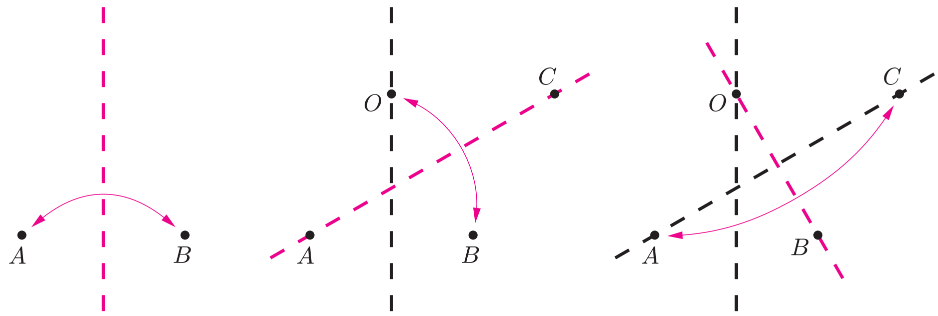
mała delta

Trzydziestka na trzydziestolecie

1. Wiadomo, że nie każdą konstrukcję da się wykonać za pomocą cyrkla i linijki. A jakie konstrukcje da się wykonać, gdy nie mamy ani cyrkla, ani linijki, tylko czystą kartkę z dwoma zaznaczonymi punktami A i B? Cóż, koła raczej z takiej kartki nie wymodelujemy, ale np. sześciokąt foremny jak najbardziej. Zginamy zatem kartkę tak, by punkt A znalazł się na punkcie B (patrzymy pod światło) i wzdłuż zgięcia otrzymujemy symetralną odcinka AB. Potem zginamy kartkę tak, by punkt A leżał na zgięciu, natomiast punkt B wskoczył na pewien punkt O położony na symetralnej odcinka AB. Uzyskany punkt O jest wierzchołkiem równobocznego trójkąta ABO i zarazem środkiem szukanego sześciokąta. Zginamy teraz kartkę wzdłuż odcinka BO i punkt A ląduje na pewnym punkcie C, który jest trzecim bokiem sześciokąta. Znalezienie kolejnych jest bardzo proste.

A jak, zginając kartkę, otrzymać ośmiokąt foremny?



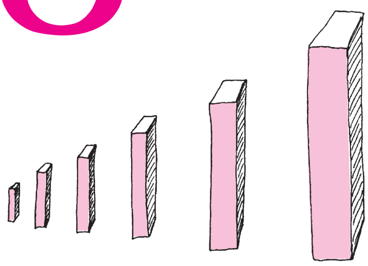
δ δ δ

2. Pomylenie dodawania z mnożeniem (lub – co gorsza – z potęgowaniem) prowadzi zwykle do katastrofy na wszelkiego rodzaju klasówkach. Na szczęście nie zawsze, mamy bowiem równość:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = \sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\ldots}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2$$

δ δ δ

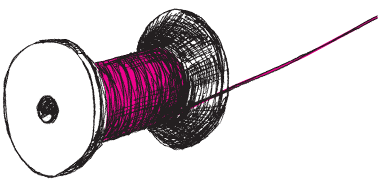
3. Rektyfikacja okręgu to znalezienie za pomocą cyrkla i linijki odcinka o długości równej obwodowi danego okręgu. Przybliżona konstrukcja pochodząca od Kochańskiego jest na tyle dokładna, że ludzkie oko może spostrzec błąd dopiero, gdy okrąg ma średnicę około pół metra. Lepsza jest konstrukcja Ramanujana: błąd dostrzeżemy dopiero, gdy okrąg będzie wielkości Polski. Nie zmienia to faktu, że rektyfikacja okręgu jest niewykonalna. Dowiódł tego w 1883 roku Lindemann.



4. Lawina

Potrzebne jest „wykładnicze” domino. Każdy kolejny klocek powinien mieć wymiary od $\sqrt{2}$ do 1,5 raza większe niż poprzedni. Dobór odpowiednich materiałów pozostawiamy inwencji czytelników. Wystarczy dziewięć klocków. Największy będzie miał wymiary od 16 do 25 razy większe niż najmniejszy. Ustawiamy domina począwszy od największego. Każde mniejsze stawiamy połowę jego wysokości przed większym (patrz rysunek).

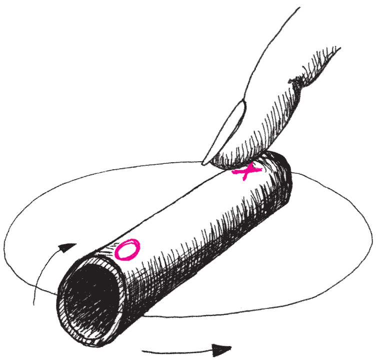
Po ustawieniu, wytrącamy z równowagi najmniejsze domino, które cichutko przewraca większe, które z kolei odrobinę głośniej przewraca następne… ŁUUP!



5. Posłuszna szpula

Potrzebna jest szpula (albo szpulka) z nawiniętą mocną nitką, sznureczkiem, a najlepiej tasiemką. Szpulę kładziemy na ziemi i ciągnąc za tasiemkę powodujemy rozwinięcie się szpuli (patrz rysunek).

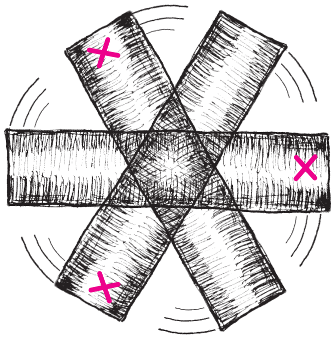
Czy ciągnąc za tę samą tasiemkę można spowodować, żeby szpulka się z powrotem nawinęła?



6. Tajemnicza rurka

Potrzebny jest kawałek giętkiej rurki o średnicy około 2 cm, pisak do folii i gładki stół. Odcinamy kawałki rurki o długości trzech, czterech i pięciu zewnętrznych średnic. Eksperyment zaczynamy od rurki trzy razy dłuższej niż jej średnica. Na jednym jej końcu zaznaczamy $\times$, a na drugim $\circ$. Kładziemy ją na stole i naciskając palcem koniec oznaczony krzyżykiem, gwałtownie wprowadzamy rurkę w szybką podwójną rotację: wokół osi cylindra i wokół osi prostopadłej do rurki i stołu. (Patrz rysunek) Trzeba trochę potrenować, żeby to się udało.

Obserwując szybko obracającą się rurkę dostrzeżemy, że widzimy trójkąt utworzony z krzyżyków, a kółek nie widzimy wcale! (Patrz rysunek)



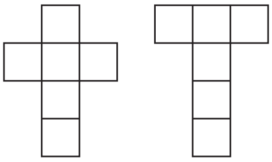
Co i dlaczego zobaczymy dla pozostałych rurek?

7. Ukryte kolory (doświadczenie dla zaawansowanych)

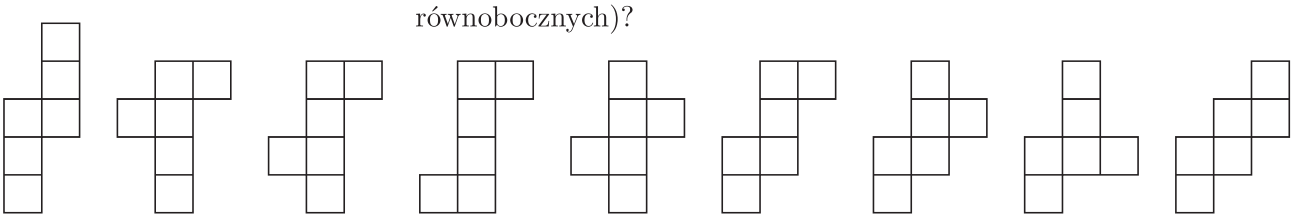
Potrzebny jest ciekłokrystaliczny wyświetlacz (sklep komputerowy, hipermarket?) oraz dwa opakowania po płytach CD albo kasetach magnetofonowych. Patrząc na odbicie ekranu w jednym z pudełek, należy wstawić pomiędzy ekran a jego obraz przezroczystą część drugiego opakowania. Zobaczymy fantastyczne kolorowe wzory, których nie widać, gdy patrzymy przez pudełko bezpośrednio na ekran!

Wyjaśnić to zjawisko pamiętając, że światło polaryzuje się częściowo przez odbicie i wiedząc, że użyty plastik skręca polaryzację światła.

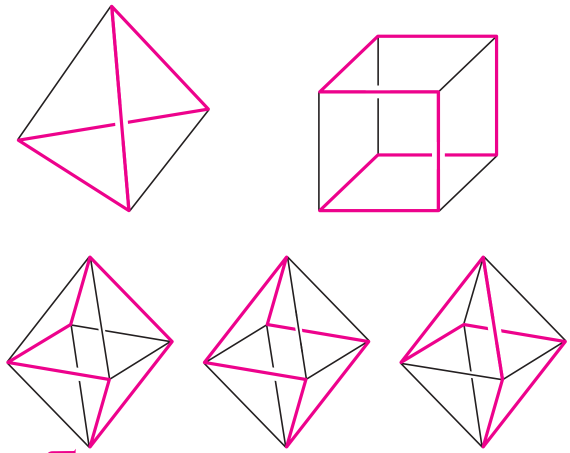
W jaki sposób spolaryzowane jest światło emitowane przez ekran (i dlaczego właśnie tak)?

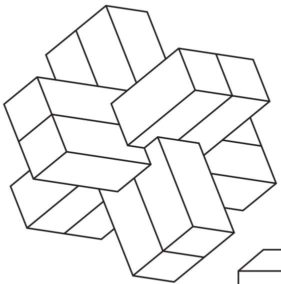


8. Sześcian ma jedenaście siatek, to znaczy jego powierzchnię można na 11 sposobów rozciąć wzdłuż krawędzi tak, aby pozostała nadal w jednym kawałku, ale dawała się położyć na płaszczyźnie – wszystkie one są na rysunku. A ile siatek ma foremny czworościan albo foremny ośmiościan (ich powierzchnia składa się, odpowiednio, z 4 i z 8 trójkątów równobocznych)?

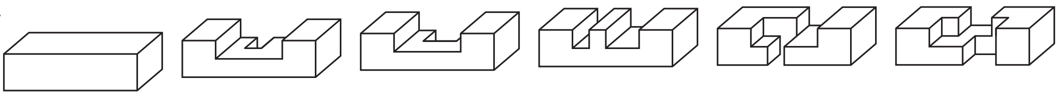


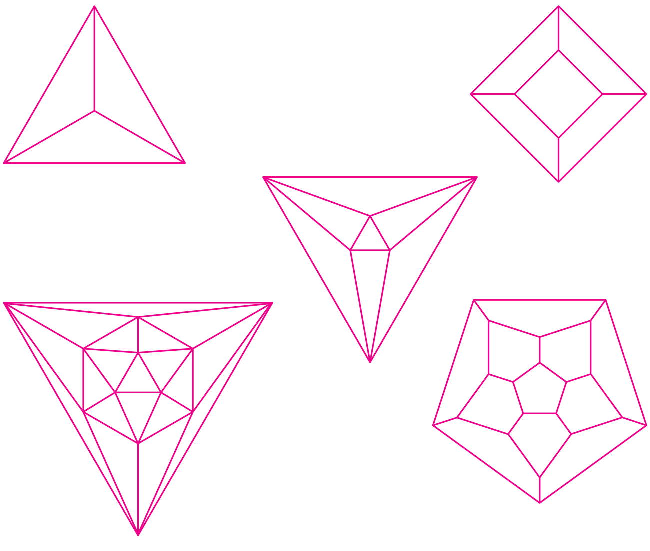
9. Cykl Hamiltona to taka droga po krawędziach grafu (czyli układu kresek, zwanych krawędziami, łączących punkty, zwane wierzchołkami), że idąc po niej, odwiedzimy dokładnie raz każdy wierzchołek i powrócimy do tego, od którego zaczęliśmy. Można szukać cykli Hamiltona w modelu krawędziowym wielościanu, np. foremnego – bo to przecież graf. I czworościan, i sześcian mają tylko po jednym cyklu Hamiltona, gdy zgodzimy się utożsamiać cykle wyglądające tak samo. Ośmiościan ma ich trzy. Są one na rysunkach. A ile różnego kształtu cyklów Hamiltona mają pozostałe wielościany foremne?



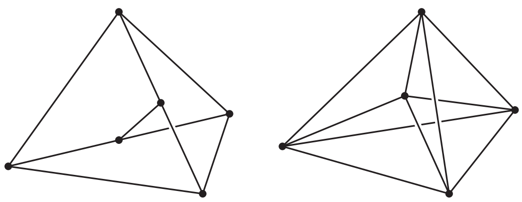


10. Podwójny krzyż dający się ułożyć z drewnianych patyczków podobno został wymyślony całe wieki temu przez litewskich drwali. Na rysunku pokazany jest kształt takich sześciu patyczków. Wystrugajcie sobie takie patyczki i ułóżcie z nich krzyż. Istnieje jeszcze jeden układ takich patyczków nieznacznie różniący się od narysowanego. Znajdźcie go.





11. Nie każdy graf można przedstawić na płaszczyźnie, to znaczy narysować go w ten sposób (uwaga: długość ani krzywizna kresek nie są ważne), by żadne dwie jego krawędzie nie przecinały się. Graf każdego wielościanu foremnego da się tak narysować. Obok są narysowane ich spłaszczone grafy. Niżej – dwa grafy, których spłaszczyć się nie da. To ważne grafy, bo każdy niespłaszczalny graf zawiera w sobie (jako fragment) co najmniej jeden z nich.

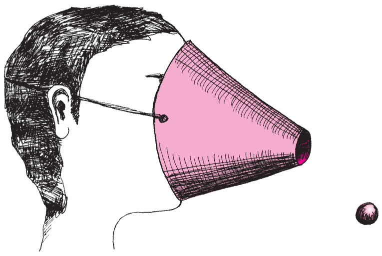


12. Gdyby ktoś mógł zobaczyć Układ Słoneczny od strony północnego bieguna świata (np. z Gwiazdy Polarnej), to zobaczyłby, że wszystkie planety obiegają Słońce w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (jest to tzw. ruch prosty). W tym samym kierunku obiega swoje planety większość satelitów. Właśnie – nie wszystkie! Co najmniej cztery takie satelity (mówi się o ruchu wstecznym) ma Jowisz; nadano im specjalnie nazwy kończące się na -e. Oto one: Ananke, Carme, Pasiphae i Sinope. Saturn też ma wstecznego satelitę: Phoebe. Co do Urana to trudno powiedzieć, bo jego satelity obiegają go w płaszczyźnie praktycznie prostopadłej do płaszczyzny orbity. Podobnie jest z układem Pluton-Charon. Problem pochodzenia satelitów o ruchu wstecznym jest ciągle daleki od wyjaśnienia.

13. Heliometr to wbrew nazwie nie „przyrząd do mierzenia Słońca”, cokolwiek by to miało znaczyć. Był to osobliwy teleskop przeznaczony do mierzenia małych względnych odległości kątowych gwiazd. Zbudował go Fraunhofer w 1826 r. Obiektyw tego teleskopu był przecięty wzdłuż średnicy, jego połówki przesuwało się za pomocą śruby mikrometrycznej, a całość była obracana wokół osi teleskopu. Średnicę połowiącą obiektyw ustawiało się równolegle do łuku łączącego dwie gwiazdy. Każda połówka dawała niezależny obraz obu gwiazd i przesuwając te połówki należało doprowadzić do pokrycia się w okularze obrazu jednej gwiazdy z obrazem drugiej. Na podstawie odczytu śruby mikrometrycznej i przy znajomości ogniskowej teleskopu można było dość dokładnie określić kątową odległość gwiazd. Za pomocą heliometru Bessel w latach 1837–38 stwierdził, że gwiazda 61 Cygni zmienia w rytmie rocznym położenie na niebie (tzn. na tle gwiazd), a tym samym zmierzył jej paralaksę heliocentryczną.

14. Panowała kiedyś zasada, że nowo odkrywane planetoidy nazywano imionami żeńskimi. Nie dało się tego jednak utrzymać z powodu wielkiej liczby ciągle odkrywanych planetoid. Jednak do dziś nazwy żeńskie nadaje się obiektom na powierzchni Wenus. Jedyna męska nazwa na tej planecie to Góry Maxwella.

15. W tablicach księżycowych publikowanych w rocznikach astronomicznych znajduje się sporo luk oznaczających, że jakiegoś dnia Księżyc nie wschodzi, innego dnia nie góruje itd. Jak to możliwe? Otóż Księżyc porusza się po niebie dość szybko ($13\overset{\circ}{,}176$ na dobę) i w dodatku z zachodu na wschód. Dlatego jeżeli pewnego dnia np. górował tuż przed północą, to kolejne jego górowanie wypadnie tuż po północy, ale nie zaraz następnego dnia, lecz jeszcze następnego. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla wschodów i zachodów, stąd luki w tabeli.



16. Łapanie podczas łypania

Potrzebny jest karton, nożyczki, gumka i piłeczki. Z kartonu robimy stożek ścięty i mocujemy za pomocą gumki do twarzy (własnej, kolegi lub koleżanki) tak jak na rysunku.

Zadaniem osoby z „noskiem” jest próba łapania rzucanych do niej piłeczek. Okaże się to zadziwiająco trudne! Dlaczego?

17. Ważenie samochodu

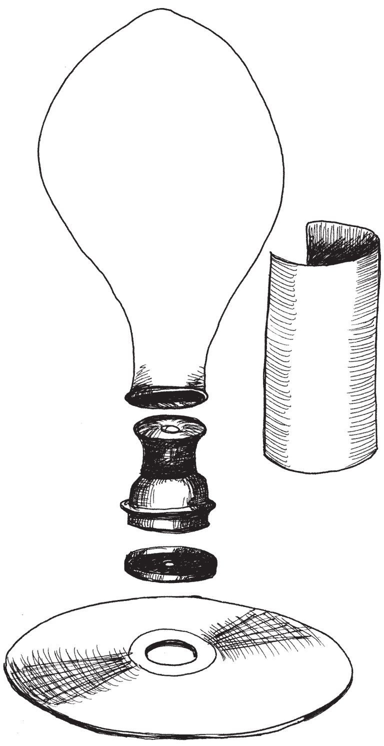
Potrzebny jest samochód, równe podłoże, kilkanaście kartek papieru, taśma klejąca, miarka i przyrząd do mierzenia ciśnienia w oponach. Samochód stawiamy na równym podłożu. Każde koło otaczamy kartkami papieru tak, aby zmierzyć pole powierzchni styku opony z podłożem. Mierzymy tę powierzchnię styku dla każdego koła i ciśnienie w każdym kole.

Ile wynosi ciężar samochodu?

18. Sejsmograf drogowy

Potrzebne są: polska droga (polecam warszawskie ulice), samochód, biała tablica, ścieralny pisak. Siadamy w samochodzie stawiając przed sobą tablicę, tak byśmy mogli sięgnąć do niej pisakiem trzymanym w wyciągniętej ręce. Po ruszeniu dotykamy do tablicy pisakiem, zamykamy oczy i wolno przesuwamy pisak poziomo po tablicy. Otwieramy oczy i oglądamy sejsmograficzny obraz naszej „równej” ulicy. Po wyjściu z samochodu możemy zmierzyć amplitudę zarejestrowanych „trzęsień samochodu”. Jeżeli wyrazimy te amplitudy w mikrometrach, i weźmiemy ich logarytm dziesiętny, to otrzymamy skalę analogiczną do np. skali Richtera.

Jaki stopień trzęsienia w tej skali okazałby się tragiczny w skutkach?



19. Poduszkowiec

Potrzebne są: niepotrzebna płyta CD, wieczko od pudełka po filmie, główka butelki po wodzie ze „sportowym” zamknięciem, rurka pozostała po rolce papieru toaletowego, klej (najlepiej pistolet z klejem na gorąco) i balon. W wieczku robimy dziurkę o średnicy około 2 mm i przyklejamy do CD, a do wieczka przyklejamy zamkniętą główkę butelki (patrz rysunek). Pompujemy balon i zakładamy na główkę. Przygotowujemy wspornik z rurki (należy wziąć około 2/3 rurki i rozciąć ją wzdłuż). Sprawdzamy, czy możemy go łatwo założyć na balon, następnie otwieramy zaworek główki butelki, szybko zakładamy wspornik i poduszkowiec gotowy!

Należy go wypróbować na gładkim stole.

20. Gwiazdy masywne ewoluują szybciej od mało masywnych, gdyż dużo rozrzutniej gospodarują zapasami swojego jądrowego paliwa. Po zużyciu wodoru w centrum gwiazda zwiększa jasność i rozmiary. Tzw. paradoks Algola polega na tym, że w wielu układach podwójnych gwiazdą jaśniejszą i większą – czyli zaawansowaną w ewolucji – jest gwiazda o mniejszej masie. Za taki stan odpowiedzialny jest przepływ masy z jednej gwiazdy na drugą. Mianowicie w przeszłości gwiazda masywniejsza jako pierwsza uległa rozdęciu, a wtedy jej materia zaczęła gwałtownie przepływać na gwiazdę towarzyszącą, czego skutkiem stało się odwrócenie stosunku mas. W takich układach podwójnych mamy więc gwiazdę o mniejszej masie, ale nadal rozdętą, czyli zaawansowaną ewolucyjnie, oraz gwiazdę o masie większej, ale która „przybrała na wadze” dopiero co i dlatego jeszcze nie przestała być gwiazdą młodą w sensie ewolucyjnym. Takim właśnie układem jest m.in. Algol (czyli β Persei), najwcześniej znana gwiazda zmienna zaćmieniowa i druga w ogóle gwiazda zmienna.

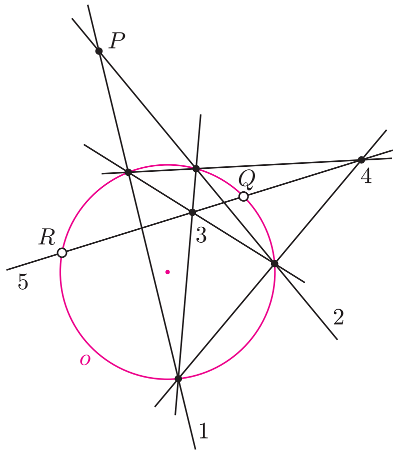
21. Często słyszy się, że satelita obiega Ziemię po okręgu, ponieważ działająca na niego siła odśrodkowa równoważy dośrodkową (grawitacyjną). Tymczasem pierwsza zasada dynamiki głosi, że jeżeli działające na obiekt siły równoważą się, to porusza się on jednostajnie po prostej. Coś więc jest tu nie tak. Co?

22. Miesiąc gwiazdowy (czas obiegu Księżyca wokół Ziemi) wynosi $G = 27{,}321661$ dni, a miesiąc synodyczny (odstęp czasu między kolejnymi np. nowiami) $S = 29{,}530589$ dni. Czy liczby te są jakoś związane? Tak! Mianowicie $360°/G$ to prędkość kątowa Księżyca w układzie inercjalnym, $360°/S$ to jego prędkość w układzie obracającym się w takim tempie, w jakim Słońce (pozornie) obiega Ziemię w ciągu roku gwiazdowego, a więc z prędkością $360°/R$, gdzie $R = 365{,}256362$ dni. A prędkości kątowe też się dodają i odejmują, dlatego

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{G} - \frac{1}{R}.$$

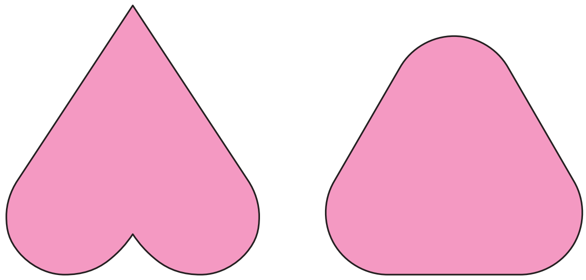
Sprawdź!

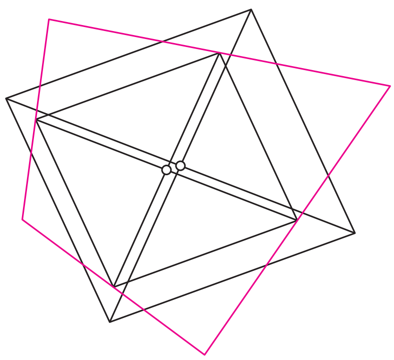
23. Studentom astronomii zadawano czasami na egzaminie złośliwe pytanie: Jak stała słoneczna zależy od długości fali? Stała słoneczna to ilość energii padającej ze strony Słońca w jednostce czasu na jednostkę powierzchni – zatem od długości fali nie zależy, bo jest wielkością „scałkowaną” po wszystkich długościach fal. Wynosi 1367 W/m^2. Za to zmienia się w czasie, mianowicie jest nieco większa od powyższej wartości średniej podczas maksimum aktywności Słońca. Może wydawać się dziwne, że Słońce zaplamione wysyła więcej energii niż czyste. Jest jednak tak dlatego, że zmniejszoną wskutek obecności plam emisję energii z fotosfery rekompensują z nadwyżką burzliwe zjawiska towarzyszące plamom i zachodzące nad fotosferą, tj. pochodnie i rozbłyski. Wahania są na poziomie 1 W/m^2.



24. Rysowanie stycznej do okręgu wcale nie wymaga użycia cyrkla. Co więcej – bez niego jest o wiele szybsze i prostsze. Oto przepis na narysowanie stycznej do okręgu o przechodzącej przez dany punkt P poza okręgiem. Rysujemy dwie sieczne różnej długości, których przedłużenia przechodzą przez P (proste 1 i 2). Wyznaczają one cztery punkty na okręgu. Łączymy te punkty parami i znajdujemy przecięcia powstałych prostych (punkty 3 i 4). Prosta 5, przechodząca przez punkty 3 i 4, przecina okrąg w punktach Q i R. Otóż proste PQ i PR są styczne do okręgu o. Wielką zaletą tej metody jest to, że identycznie konstruuje się styczne do elipsy, paraboli i hiperboli. Wadą jednak jest fakt, że uzasadnienie tej konstrukcji jest proste dopiero, gdy użyjemy matematyki nieco wyższej niż szkolna. Ale pokazuje, że ta nieco wyższa matematyka też może się w praktyce uczniowskiej przydać.

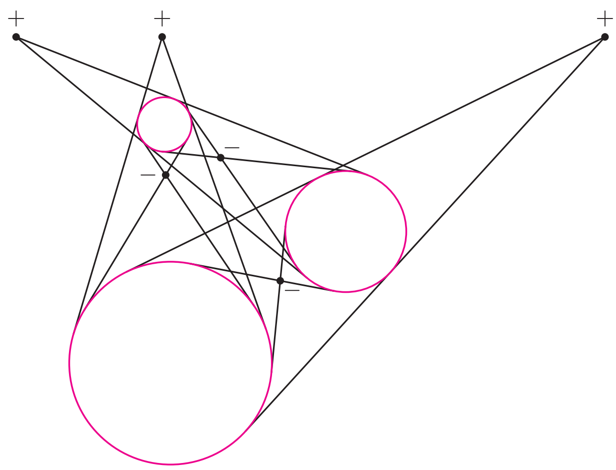
25. Koło ma tę własność, że każda prosta, która połowi jego obwód, połowi też jego pole. Bez trudu można zauważyć, że wiele figur ma tę własność. Na przykład wszystkie płaskie figury środkowosymetryczne. A czy są jeszcze inne? Okazuje się, że tak. Obok są narysowane dwie takie figury. Czy umielibyście wymyślić jeszcze jedną taką figurę? A wiele?





26. Jeśli podzielić każdy bok jakiegoś czworokąta na połowy i połączyć środki sąsiednich boków, to powstaje równoległobok o polu równym połowie pola wyjściowego czworokąta, ale tu zajmie nas inny fakt. Mianowicie przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie będącym środkiem ciężkości czterech jednakowych mas umieszczonych w wierzchołkach czworokąta. To teraz podzielmy bok czworokąta na trzy równe części i połączmy prostymi punkty sąsiadujące z tym samym wierzchołkiem. Też otrzymamy równoległobok (o jakim polu?). Jego przekątne przecinają się w punkcie, który jest środkiem ciężkości wyjściowego czworokąta o równo na całej powierzchni rozmieszczonej masie.

27. Dwa niewspółśrodkowe okręgi o różnych promieniach zawsze mają dwa środki jednokładności: można je nałożyć przez jednokładność o stosunku dodatnim (środek jest w punkcie przecięcia się wspólnych zewnętrznych stycznych, o ile istnieją) i o stosunku ujemnym (tu przecinamy wewnętrzne styczne, też o ile istnieją). Nazwijmy te środki, odpowiednio, dodatnim i ujemnym. Jeśli więc narysujemy trzy okręgi o trzech różnych promieniach i środkach, będziemy mieli trzy środki dodatnie i trzy ujemne. Okazuje się, że środki dodatnie leżą na jednej prostej! Ujemne nie, ale dowolne dwa ujemne leżą na jednej prostej z jednym dodatnim! Czy umiecie uzasadnić, dlaczego tak jest?



28. Grecy ze szkoły pitagorejskiej wysoce sobie cenili wszelkie oznaki harmonii i ładu wśród liczb, nic więc dziwnego, że zainteresowały ich tzw. **liczby bliźniacze**, czyli takie pary kolejnych liczb pierwszych, których różnica jest równa 2. Takimi parami są np. 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31, 41 i 43. Temat jest interesujący do dziś, nie wiadomo bowiem, czy takich par jest skończenie, czy też nieskończenie wiele. A czy istnieją takie trójki liczb pierwszych, że każde dwie kolejne różnią się o 2? Na to pytanie znacznie łatwiej odpowiedzieć. Owszem, istnieje taka trójka: 3, 5 i 7, ale jest ona jedyna. Istotnie, rozpatrzmy liczby postaci $n, n+2$ i $n+4$, zakładając, że tym razem $n > 3$. Jeśli n jest podzielna przez 3, to, oczywiście, nie jest liczbą pierwszą. Jeśli n nie jest podzielna przez 3, to daje resztę 1 lub 2. W pierwszym przypadku liczba $n+2$ jest podzielna przez 3, w drugim – liczba $n+4$. Nie może się więc zdarzyć, że wszystkie trzy liczby są pierwsze.

δ δ δ

29. Liczbą parzystą jest tylko co druga liczba naturalna, a jednak… liczb naturalnych parzystych jest „tyle samo” co wszystkich liczb naturalnych. Uznamy, że dwa zbiory mają „tyle samo” elementów (są **równoliczne**), gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między ich elementami, czyli gdy istnieje funkcja różnowartościowa z jednego z tych zbiorów w drugi, przy czym wartości funkcji ten drugi zbiór wyczerpują. Taką funkcją ze zbioru $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych w zbiór $2\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych parzystych jest taka funkcja f, że $f(n) = 2n$. Podobnie zbiór wszystkich liczb naturalnych podzielnych przez ustaloną liczbę k jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$. Można też wykazać, że każdy nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{N}$ jest równoliczny z całym zbiorem $\mathbb{N}$.

Jak sprawdzić na wielkim balu, czy jest na nim tyle samo kobiet co mężczyzn? Wystarczy puścić odpowiednią muzykę. Kiedy każdy z Panów zaprosi do tańca jedną Panią, okaże się, czy został wolny jakiś Pan lub czy ten drugi zbiór został wyczerpany…

δ δ δ

30. **Paradoksy logiczne** nieraz w historii matematyki ujawniały luki w rozumowaniu lub nie dość sprecyzowane pojęcia. Oto przykład paradoksu: udowodnimy istnienie jednorożca. Twierdzenie

istnieje jednorożec

jest, jak łatwo zauważyć, równoważne twierdzeniu

istnieje istniejący jednorożec.

Otóż mamy teraz dwie możliwości (gdyż opieramy się na logice dwuwartościowej):

1. albo *nie istnieje istniejący jednorożec,*
2. albo *istnieje istniejący jednorożec.*

To pierwsze zdanie jest w oczywisty sposób fałszywe, gdyż jeśli jednorożec jest istniejący, to nie może nie istnieć. Zatem prawdziwe musi być drugie zdanie, które stwierdza istnienie istniejącego jednorożca, a więc, jak zauważyliśmy, po prostu istnienie jednorożca. Przeoczenie biologów czy błąd w rozumowaniu?

Małą Deltę przygotowali: Wiktor Bartol, Marek Kordos, Tomasz Kwast, Witold Sadowski, Piotr Zalewski.
4–7, 16–19 *wg pomysłów Paula Doherty'ego.*