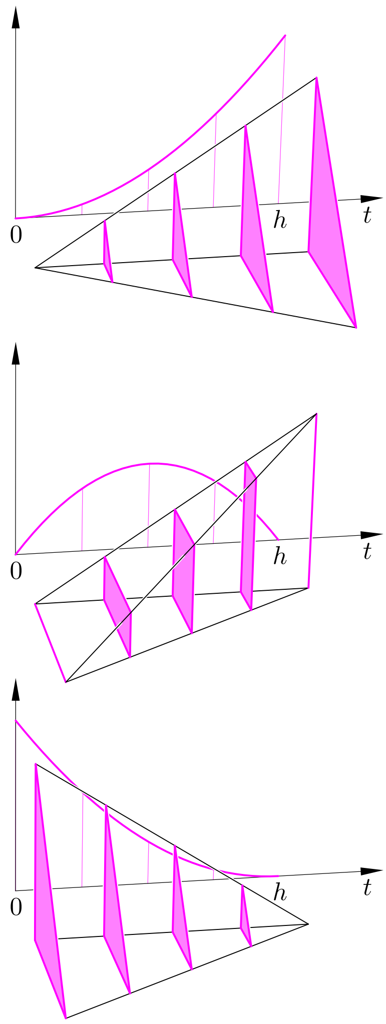
Wyobraź sobie wzór

Przemysław KICIAK



Rys. 1

W *Małej Delcie* (*Delta* nr 4/2003) jest taka definicja:

Pryzmatoid to wielościan, którego dwie ściany (zwane podstawami) są równoległe i zawierają wszystkie jego wierzchołki.

Objętość pryzmatoidu jest równa

$$(*) \qquad \frac{1}{6}h(B_1 + B_2 + 4S),$$

gdzie h to odległość podstaw (czyli wysokość), B_1 i B_2 to pola podstaw, a S oznacza pole przekroju pryzmatoidu płaszczyzną równoległą do podstaw i jednakowo od nich odległą. Autor zachęcił Czytelników wyrafinowanych do udowodnienia tego wzoru. Oto dowód dla Czytelników *Nie Całkiem Małej* (ale i *Nie Całkiem Dużej*) *Delty*.

Niech podstawy pryzmatoidu leżą w płaszczyznach $x = 0$ i $x = h$ („bez straty ogólności"). Przez $S(t)$ oznaczymy pole przekroju pryzmatoidu płaszczyzną $x = t$ dla $t \in [0, h]$. Objętość pryzmatoidu możemy przedstawić w postaci całki

$$\int_0^h S(t)\,\mathrm{d}t,$$

i teraz wystarczy zbadać funkcję podcałkową.

Każdy wielościan można podzielić na czworościany, które mają co najwyżej wspólne ściany i których wierzchołki są wierzchołkami tego wielościanu. Zatem jego objętość jest sumą objętości tych czworościanów. W naszym przypadku wierzchołki każdego czworościanu leżą w płaszczyznach $x = 0$ i $x = h$, przy czym liczba wierzchołków w pierwszej z nich może być równa 1, 2 lub 3, a w drugiej leżą pozostałe. Okazuje się, że funkcja $s(t)$, opisująca pole przekroju czworościanu w tych trzech przypadkach, ma postać

$$ct^2, \qquad ct(h-t), \qquad c(h-t)^2,$$

gdzie c jest pewną stałą, a więc zawsze jest to wielomian drugiego stopnia (rys. 1).

Kwadratura to suma wartości funkcji w pewnych punktach, pomnożonych przez pewne liczby.

Funkcja $S(t)$, opisująca pole przekroju pryzmatoidu, jest sumą funkcji opisujących przekroje czworościanów, a więc również jest wielomianem drugiego stopnia i poszukiwaną wartość całki możemy obliczyć przy użyciu wzoru zwanego *kwadraturą Simpsona*:

$$\int_0^h S(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}h\left(S(0) + S(h) + 4S\left(\frac{h}{2}\right)\right).$$

To już koniec dowodu, ale chwileczkę… wzór Simpsona daje dobry wynik także wtedy, gdy funkcja podcałkowa jest wielomianem *trzeciego* stopnia! Dowód jest łatwy, polecam. Zatem udowodniony wzór nadaje się do obliczania jeszcze czegoś.

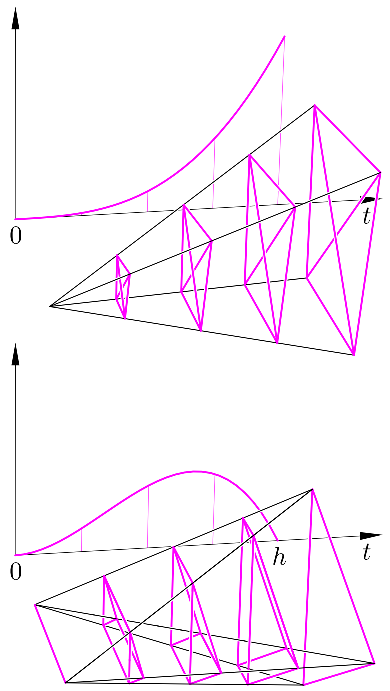
Teraz każdy punkt ma cztery współrzędne, np. x, y, z, w.

Wielościan czterowymiarowy ma się tak do „zwykłego" wielościanu jak ten do wielokąta. Jest to więc figura w przestrzeni czterowymiarowej, której ściany są wielościanami trójwymiarowymi. Figury takie można podzielić na rozłączne z wyjątkiem ścian (które są czworościanami) *sympleksy czterowymiarowe*, tj. czterowymiarowe wielościany wypukłe o pięciu wierzchołkach. Czytelnicy wyrafinowani umieją to udowodnić. W szczególności możemy zdefiniować *pryzmatoid czterowymiarowy* jako

Hiperpłaszczyzna to różny od całej przestrzeni niepusty zbiór punktów, których współrzędne spełniają ustalone równanie liniowe.

wielościan czterowymiarowy, którego dwie ściany (zwane podstawami) są (trójwymiarowymi) wielościanami leżącymi w równoległych hiperpłaszczyznach i zawierają wszystkie jego wierzchołki.

Jeśli podstawy takiego pryzmatoidu leżą w hiperpłaszczyznach $x = 0$ i $x = h$, czyli jego wysokość jest równa h, objętość (trójwymiarowa) podstaw jest równa B_1 i B_2, a objętość „środkowego" przekroju S, to znów kwadratura Simpsona



Rys. 2

daje nam wzór $(*)$, który teraz opisuje *objętość czterowymiarową* naszego pryzmatoidu.

Istotnie, możemy podzielić go tak, aby każdy otrzymany sympleks miał 1, 2, 3 lub 4 wierzchołki w hiperpłaszczyźnie $x = 0$, a pozostałe w hiperpłaszczyźnie $x = h$. W pierwszym i ostatnim przypadku dla każdego $t \in (0, h)$ przekrój sympleksu hiperpłaszczyzną $x = t$ jest czworościanem, a w pozostałych dwóch graniastosłupem trójkątnym (rys. 2). Objętość przekroju sympleksu w każdym z tych czterech przypadków jest opisana przez jedną z funkcji

$$ct^3, \qquad ct^2(h-t), \qquad ct(h-t)^2, \qquad c(h-t)^3,$$

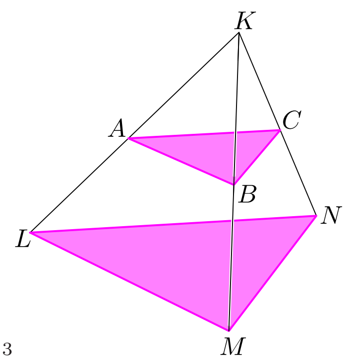
więc w rzeczy samej funkcja $S(t)$, opisująca objętość przekroju pryzmatoidu hiperpłaszczyzną $x = t$, jest wielomianem trzeciego stopnia.

Możemy analogicznie definiować pryzmatoidy o jeszcze większych wymiarach i obliczać ich objętości n-wymiarowe, ale wtedy kwadratura Simpsona już nie wystarczy (dla każdego n istnieją wszakże kwadratury równe całce dla dowolnego wielomianu stopnia mniejszego niż n i możemy użyć którejś z nich). Natomiast działa ona znakomicie, jeśli chcemy obliczyć objętość dwuwymiarową (czyli pole) pryzmatoidu dwuwymiarowego – trapezu o wysokości h.
Co nie oznacza, że nie da się wtedy użyć prostszych wzorów.

. . . a matematyk wlazł na patyk i z patyka skoczył
w niepojęty, a mnóstwo rozkoszy wróżący, czwarty wymiar.

Julian Tuwim

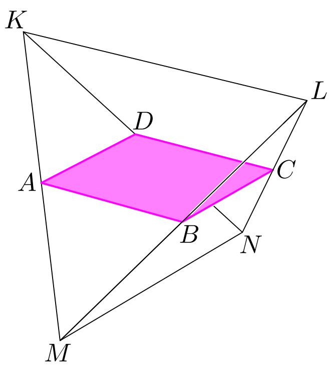
Można bez całek



Rys. 3

Dla mnie, staroświeckiego geometry, z całkami do wielościanu to jakby z nożem do ryby. Zobaczmy więc, jak to zostało rozwiązane:

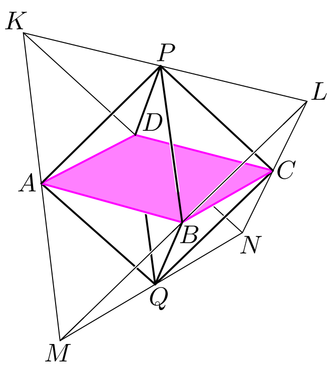
- zauważamy, że jeśli pryzmatoid da się podzielić na mniejsze pryzmatoidy o wierzchołkach na tych samych płaszczyznach, to gdy dla tych mniejszych dowodzony wzór jest poprawny, jest poprawny i dla tego, który się z nich składa;
- dzielimy więc pryzmatoid na czworościany o wierzchołkach na płaszczyznach podstaw;
- za pomocą całek sprawdzamy dowodzony wzór dla każdego z powstałych czworościanów.



Rys. 4

Aby się więc pozbyć całek, trzeba sprawdzić dowodzony wzór dla tych czworościanów. Niech wierzchołkami ze „starych” podstaw będą K, L, M, N.

Gdy na jednej z podstaw leży jeden wierzchołek (rys. 3), a na drugiej trzy, przekrój w połowie ich odległości jest trójkątem ABC o polu cztery razy mniejszym od podstawy czworościanu LMN. Mamy więc $B_1 = 0$ oraz $B_2 = 4S$, a więc dowodzony wzór daje $\frac{1}{6}h(2B_2) = \frac{1}{3}hB_2$, co jest znanym wzorem na objętość czworościanu.



Rys. 5

Gdy z kolei na każdej podstawie są dwa wierzchołki (rys. 4), przekrój w połowie jest równoległobokiem, co wynika z twierdzenia Talesa zastosowanego do każdej ze ścian czworościanu. Znalezienie jego objętości może być przeprowadzone tak. Łączymy wierzchołki przekroju ze środkami krawędzi KL i MN. Otrzymujemy bryłę $PABCDQ$, której objętość to $\frac{1}{3}hS$, jako że są to dwa ostrosłupy zestawione podstawami. Ciekawe natomiast jest to, że „pozostałości” czworościanu $KLMN$ to cztery czworościany jednokładne z nim ($KPAD$, $LPCB$, $MQAB$, $NQDC$), każdy w skali $\frac{1}{2}$. Każdy więc ma 8 razy mniejszą objętość od objętości czworościanu $KLMN$, a więc razem mają połowę jego objętości. Stąd objętość $KLMN$ jest równa podwojonej objętości $PABCDQ$, czyli $\frac{2}{3}hS$ i to dobrze, bo mamy $B_1 = B_2 = 0$, a więc dowodzony wzór przybiera postać $\frac{1}{6}h(4S)$.

Tak więc wykazaliśmy poprawność wzoru bez użycia całek. Całki mają jednak tę przewagę, że pozwoliły od razu stwierdzić poprawność wzoru dla wymiaru 4. Każdy może więc wybrać sobie taką drogę, jaką lubi.

M. K.