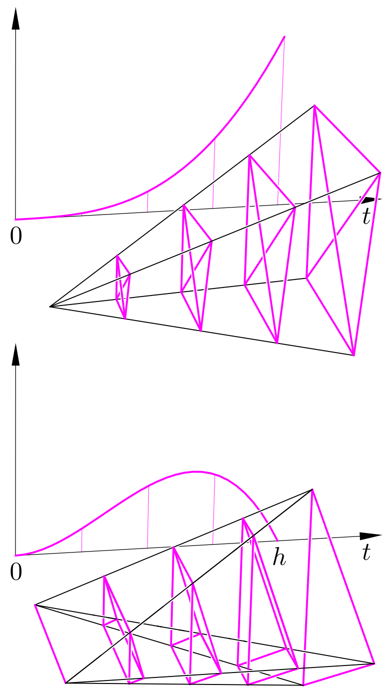
daje nam wzór (∗), który teraz opisuje *objętość czterowymiarową* naszego pryzmatoidu.

Istotnie, możemy podzielić go tak, aby każdy otrzymany sympleks miał 1, 2, 3 lub 4 wierzchołki w hiperpłaszczyźnie $x = 0$, a pozostałe w hiperpłaszczyźnie $x = h$. W pierwszym i ostatnim przypadku dla każdego $t \in (0, h)$ przekrój sympleksu hiperpłaszczyzną $x = t$ jest czworościanem, a w pozostałych dwóch graniastosłupem trójkątnym (rys. 2). Objętość przekroju sympleksu w każdym z tych czterech przypadków jest opisana przez jedną z funkcji

$$ct^3, \qquad ct^2(h-t), \qquad ct(h-t)^2, \qquad c(h-t)^3,$$

więc w rzeczy samej funkcja $S(t)$, opisująca objętość przekroju pryzmatoidu hiperpłaszczyzną $x = t$, jest wielomianem trzeciego stopnia.



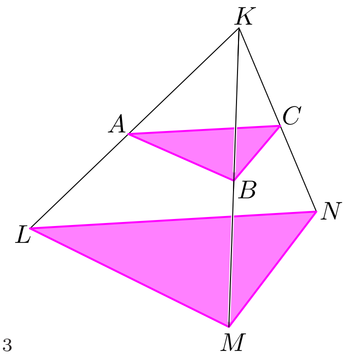
Rys. 2

Możemy analogicznie definiować pryzmatoidy o jeszcze większych wymiarach i obliczać ich objętości n-wymiarowe, ale wtedy kwadratura Simpsona już nie wystarczy (dla każdego n istnieją wszakże kwadratury równe całce dla dowolnego wielomianu stopnia mniejszego niż n i możemy użyć którejś z nich). Natomiast działa ona znakomicie, jeśli chcemy obliczyć objętość dwuwymiarową (czyli pole) pryzmatoidu dwuwymiarowego – trapezu o wysokości h.
Co nie oznacza, że nie da się wtedy użyć prostszych wzorów.

...a matematyk wlazł na patyk i z patyka skoczył
w niepojęty, a mnóstwo rozkoszy wróżący, czwarty wymiar.

Julian Tuwim

Można bez całek

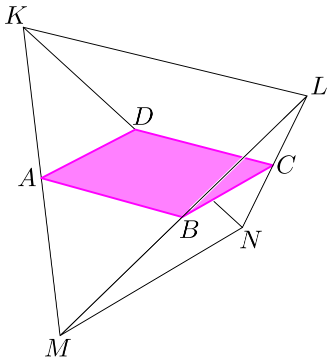


Rys. 3

Dla mnie, staroświeckiego geometry, z całkami do wielościanu to jakby z nożem do ryby. Zobaczmy więc, jak to zostało rozwiązane:

- zauważamy, że jeśli pryzmatoid da się podzielić na mniejsze pryzmatoidy o wierzchołkach na tych samych płaszczyznach, to gdy dla tych mniejszych dowodzony wzór jest poprawny, jest poprawny i dla tego, który się z nich składa;
- dzielimy więc pryzmatoid na czworościany o wierzchołkach na płaszczyznach podstaw;
- za pomocą całek sprawdzamy dowodzony wzór dla każdego z powstałych czworościanów.

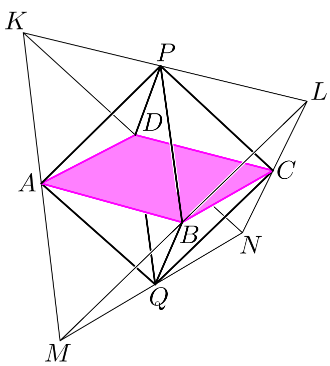
Aby się więc pozbyć całek, trzeba sprawdzić dowodzony wzór dla tych czworościanów. Niech wierzchołkami ze „starych” podstaw będą K, L, M, N.



Rys. 4

Gdy na jednej z podstaw leży jeden wierzchołek (rys. 3), a na drugiej trzy, przekrój w połowie ich odległości jest trójkątem ABC o polu cztery razy mniejszym od podstawy czworościanu LMN. Mamy więc $B_1 = 0$ oraz $B_2 = 4S$, a więc dowodzony wzór daje $\frac{1}{6}h(2B_2) = \frac{1}{3}hB_2$, co jest znanym wzorem na objętość czworościanu.

Gdy z kolei na każdej podstawie są dwa wierzchołki (rys. 4), przekrój w połowie jest równoległobokiem, co wynika z twierdzenia Talesa zastosowanego do każdej ze ścian czworościanu. Znalezienie jego objętości może być przeprowadzone tak. Łączymy wierzchołki przekroju ze środkami krawędzi KL i MN. Otrzymujemy bryłę $PABCDQ$, której objętość to $\frac{1}{3}hS$, jako że są to dwa ostrosłupy zestawione podstawami. Ciekawe natomiast jest to, że „pozostałości” czworościanu $KLMN$ to cztery czworościany jednokładne z nim ($KPAD$, $LPCB$, $MQAB$, $NQDC$), każdy w skali $\frac{1}{2}$. Każdy więc ma 8 razy mniejszą objętość od objętości czworościanu $KLMN$, a więc razem mają połowę jego objętości. Stąd objętość $KLMN$ jest równa podwojonej objętości $PABCDQ$, czyli $\frac{2}{3}hS$ i to dobrze, bo mamy $B_1 = B_2 = 0$, a więc dowodzony wzór przybiera postać $\frac{1}{6}h(4S)$.



Rys. 5

Tak więc wykazaliśmy poprawność wzoru bez użycia całek. Całki mają jednak tę przewagę, że pozwoliły od razu stwierdzić poprawność wzoru dla wymiaru 4. Każdy może więc wybrać sobie taką drogę, jaką lubi.

M. K.