Lekcja z przyszłości (?)

Michał SZUREK

W swojej książce „Opowieści geometryczne”, pisanej w 1993 roku, przedstawiłem nieco futurystyczny scenariusz „lekcji przyszłości”. Na tej lekcji uczniowie rozwiązują zadania stereometryczne, posługując się komputerem. Komputer oblicza, pokazuje bryły w przekroju, niemalże podpowiada rozwiązania. Zadanie „samo się rozwiązuje”, a nasze myślenie przeznaczamy do wyższych celów niż nudne rachunki i przyprawiające o ból głowy wyobrażenia konfiguracji przestrzennych. „Od tego mamy komputery” mówią nauczyciele przyszłości. Myślenie jest potrzebne tam, gdzie nie da sobie rady komputer.

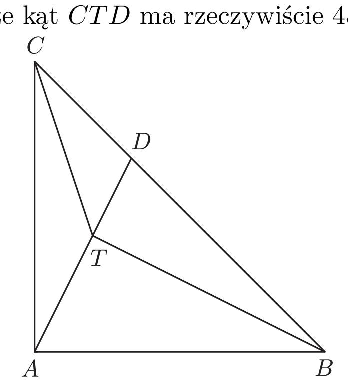
I oto, z dobrą dokładnością, scenariusz ten zrealizował się na **XXV Sesji Seminarium Edukacji Matematycznej** w Częstochowie, w marcu 2002 r. Józef Kalinowski z UŚ pokazywał siedemnaście sposobów rozwiązania zadania z Olimpiady Matematycznej.

W trójkącie prostokątnym równoramiennym podzielono przeciwprostokątną BC na trzy równe części. Niech D będzie jednym z punktów podziału wewnątrz odcinka. Wierzchołek A kąta prostego połączono z punktem D. Niech T będzie rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD. Wykazać, że kąt CTD jest równy 45 *stopni.*

Uczestnicy tej Sesji spostrzegą, że mój artykuł przedstawia „zbeletryzowaną”, ale w zasadzie wierną wersję tego, co się działo.

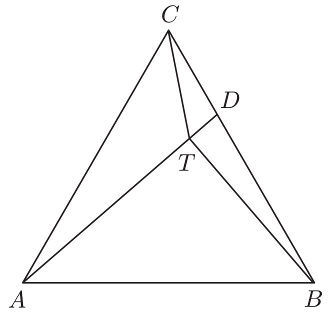
Prelegent rysował na tablicy różne proste, rachował i dowodził, a ja wyjąłem Laptopa. „To przecież prosta geometria analityczna” pomyślałem. Po chwili program w języku *Mathematica* był napisany. Wcisnąłem Enter, na ekranie pojawił się napis `tangens kata jest rowny 1`. Po wykładzie pokazałem rozwiązanie na dużym ekranie. Sesja odbywała się bowiem w doskonale wyposażonej Szkole Pożarniczej w Częstochowie. Pierwszy raz w życiu prowadziłem zajęcia w sposób, który znałem tylko z opowiadań. Piszę sobie coś na swoim komputerze, a słuchacze widzą to na ekranie.

Rysunek, który zrobiłem, posługując się graficznymi programami pakietu *Mathematica*, pokazał, że rozwiązanie jest poprawne: wszyscy zobaczyli na ekranie, że kąt CTD ma rzeczywiście 45 stopni.



– Zmieńmy trójkąt – zaproponował ktoś. – Weźmy równoboczny.

– Proszę bardzo – odpowiedziałem i zmieniłem parametry. Na ekranie pojawił się napis `kwadrat tangensa kata jest rowny 3`. Rysunek potwierdził rozwiązanie.



– A gdyby dzielić na inną liczbę części? – padło następne pytanie, ale już czas był na obiad, a przecież w Straży Pożarnej należy być szczególnie punktualnym. Potem pochłonęły wszystkich inne, bardzo ciekawe zajęcia i w sobotę rozjechaliśmy się, jak zwykle, w smutku. Zadanie uległo zapomnieniu.

W Święta Wielkanocne usiadłem spokojnie do komputera, odmawiając zjedzenia kolejnego jajka na twardo. Program obliczający tangens kąta CTD dla dowolnego trójkąta i dla dowolnego podziału boku BC nie był trudny; pisanie zajęło mi niecałe pół godziny.

Najpierw napisałem równanie prostej przez dwa punkty:

```
prosta[punkt1_, punkt2_]:=
Det[{{1, 1, 1}, {punkt1[[1]], punkt2[[1]], x},
{punkt1[[2]], punkt2[[2]], y}}];
```

potem równanie prostopadłej:

```
prostopadla[prosta_, punkt_]:=
{Coefficient[prosta, y], -Coefficient[prosta, x]}.
({x,y}-punkt)
```

wreszcie nauczyłem swojego Laptopa, jak szukać punktu wspólnego dwóch prostych:

```
wspolny[prosta1_, prosta2_]:=
{Solve[{prosta1 == 0, prosta2 == 0}, {x,y}] [[1, 1, 2]],
 Solve[{prosta1 == 0, prosta2 == 0}, {x,y}] [[1, 2, 2]]}
```

Teraz mogłem napisać zasadniczy program, wyliczający tangens kwadrat szukanego kąta w dowolnym trójkącie:

```
odpowiedz[a1_, a2_, b1_, b2_, c1_, c2_, s_]:=
Block[{},
a = {a1, a2}; b = {b1,b2}; c = {c1,c2}; d = c + s*(b-c);
t = wspolny[prosta[a, d], prostopadla[prosta[a, d] ,b]];
kosinuskwadrat = ((t-c).(t-d))^2 / ((t-c).(t-c)*(t-d).(t-d));
tangenskwadrat = Simplify[(1-kosinuskwadrat) / kosinuskwadrat]
]
```

Nawet, jeśli ktoś nie rozumie nic z tego, przyzna na pewno, że tak krótki program nie może być trudny.

Istotnie, po kilku godzinach nauki programowania każdy by coś takiego sam napisał. Nie chciało mi się dopisywać formułki, która by odróżniła, czy kąt jest ostry, czy rozwarty (po tangensie tego się nie pozna).

I zaczęło się. Wprowadziłem układ współrzędnych tak, by podstawa AB trójkąta była osią x. Umieściłem wierzchołek A w początku układu (a raczej odwrotnie: początek układu w punkcie A), skalę przyjąłem tak, by wierzchołek B wypadł w $(1; 0)$. Współrzędne trzeciego wierzchołka, C, oznaczyłem przez p, q. Podałem dowolny parametr s – jaką częścią boku BC jest CD. Wywołałem

```
odpowiedz[0, 0, 1, 0, p, q, s]
```

i zobaczyłem odpowiedź

$$\frac{q^2 s^2}{(p - p^2 - q^2 + s - 2ps + p^2 s + q^2)^2}.$$

To jest kwadrat tangensa szukanego kąta. Zadanie w najbardziej ogólnej postaci rozwiązane.

„Uff”, pomyślałem, tracąc zainteresowanie, „mało ciekawie. Ale sprawdźmy, czy dla trójkąta równobocznego kąt wyjdzie równy 60 stopni”

```
odpowiedz[-1, 0, 1, 0, 0, Sqrt[3], 1/3]
3
```

Zgadza się, to jest kwadrat tangensa 60 stopni.

Zacząłem się bawić. Dzielmy bok BC kolejno na trzy, cztery, pięć części. Jakie będą te kąty? Napisałem

```
odpowiedz[0, 0, 1, 0, 0, 1, 1/n]
```

Komputer podał ciąg, z którego od razu było widać ogólny wzór:

Jeżeli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego równoramiennego podzielimy na n równych części, to tangens kąta, o który chodzi w zadaniu, jest równy

$$\operatorname{tg}\phi_n = \frac{1}{n-2}.$$

Wczytałem teraz wierzchołki trójkąta równobocznego i kazałem komputerowi rozwiązać podobne zadanie dla podziału boku trójkąta równobocznego na n części. Znów osłupiałem. Na ekranie widniał ciąg

$$\frac{3}{(n-2)^2},$$

a zatem komputer „udowodnił” takie twierdzenie:

Jeżeli bok trójkąta równobocznego podzielimy na n równych części, to tangens kąta, o który chodzi w zadaniu, jest równy

$$\operatorname{tg}\phi_n = \frac{\sqrt{3}}{n-2}.$$

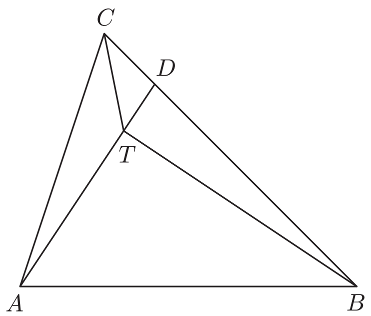
Zacząłem teraz prawie na oślep szukać trójkątów, w których te kąty są szczególnie ładne. Najpierw szukałem kąta 45 stopni wśród trójkątów o takich wierzchołkach:

$$A = (-\tfrac{1}{m}; 0), \quad B = (1; 0), \quad C = (0; 1).$$

```
m = 1; n = 1;
Do [m++;
Do [n++;
If [odpowiedz[-1/m, 0, 1, 0, 0, 1, 1/n] == 1,
Print ["m = ", m, ", n = ", n ]], {30}
],{30}
]
```

Rezultaty poszukiwań zaowocowały znalezieniem takich przykładów.

Kąty 45 stopni: dla trójkąta o wierzchołkach w $A = (-1/3; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (0; 1)$ i podziału boku BC na pięć równych części, a także dla trójkąta o wierzchołkach w punktach $A = (-1/2; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (0; 1)$ i podziału boku BC na siedem części.



Kąt 60 stopni otrzymałem, na przykład, dla trójkąta o wierzchołkach $A = (-1/2; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (0; \sqrt{3}/2)$ … i jeszcze kilku innych. Były jeszcze jakieś inne zdumiewające zależności, komputer migał, wydawało mi się, że mruga do mnie porozumiewawczo, a ja w końcu znudziłem się i zdenerwowałem się. „A co mnie to wszystko obchodzi!”.

Oto dwie z tych zdumiewających zależności: W trójkącie o wierzchołkach $A = (0; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (1111111111; 1111111111)$ kwadrat tangensa kąta, który otrzymamy z podziału boku BC na 4 równe części, jest równy

$$\frac{12345679000987654321}{548696844444444444477366255196159122O9}.$$

Natomiast trójkąt o wierzchołkach $A = (0; 0)$, $B = (1; 0)$, $C = (26; 26)$ i podział boku BC na 26 części daje jako tangens kąta:

$$\frac{26}{33175.}$$

I jak tu się nie zadziwić?

W domu goście, których tak nieuprzejmie opuściłem, pili już kawę i opychali się mazurkami.

Jaki jest morał z tej historii? Bez komputera „nie chciało by mi się”, może bym nawet nie dał rady. A z nim rozwiązałem bez trudu znacznie ogólniejsze zadanie. Rozbudził moją ciekawość… aż przyszedł przesyt. Teraz już to zadanie wcale mnie nie bawi. Obawiam się tylko najgorszego: że moje (a raczej mojego poczciwego Laptopka) wyniki są banalne i można do nich dojść prostym, klasycznym, pięknym rozumowaniem. Kto znajdzie takie właśnie rozwiązania tych zadań?