Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2004

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

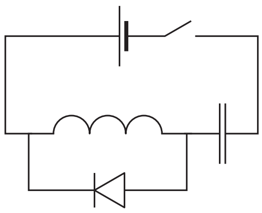
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
457 ($WT = 2{,}25$) i **458** ($WT = 1{,}83$)
z numeru 3/2003

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	37,40
Michał Adamaszek	– Kęty	36,19
Paweł Najman	– Jaworzno	34,58
Zb. Sewartowski	– Wieliczka	34,15
Paweł Kubit	– Kraków	33,68
Michał Jóźwikowski	– Błonie	33,32

Zadania z fizyki nr 366, 367

Redaguje Jerzy B. BROJAN

366. Ile stali trzeba, aby wykonać linę o długości $l = 15$ km, która zawieszona pionowo utrzyma doczepiony do jej dolnego końca ciężar równy $P = 1000$ N? Gęstość stali wynosi $\rho = 7{,}8$ g/cm^3, a jej wytrzymałość $W = 1{,}5 \cdot 10^5$ N/cm^2. Rozciągliwość (sprężystość) stali, a także zmiany natężenia pola grawitacyjnego można zaniedbać. Grubość liny nie musi być stała.



367. Zestawiono obwód składający się ze źródła napięcia 3 V, zwojnicy o indukcyjności 0,8 H, kondensatora o pojemności 2000 μF i doskonałej diody świecącej o napięciu progowym 1 V (o oporze zerowym, jeśli napięcie w kierunku przewodzenia przekroczy wartość progową, i oporze nieskończonym w innym przypadku). W chwili początkowej kondensator był nienaładowany. Po jakim czasie od zamknięcia klucza dioda zaświeciła i jak długo trwał ten sygnał?

Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\oint\!\!\!\!\sum !} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2004

Zadania z matematyki nr 469, 470

Redaguje Marcin E. KUCZMA

469. Skończony zbiór liczb naturalnych A będziemy nazywać *dopuszczalnym*, jeśli nie zawiera on żadnej pary liczb kolejnych. Dla każdego takiego zbioru oznaczmy przez $\pi(A)$ iloczyn wszystkich liczb w tym zbiorze (dla zbioru pustego przyjmujemy $\pi(\emptyset) = 1$).

Dana jest liczba naturalna n. Obliczyć sumę kwadratów liczb $\pi(A)$, odpowiadających wszystkim zbiorom dopuszczalnym zawartym w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$.

470. W kwadracie o boku długości 1 leży n-kąt wypukły ($n \geqslant 3$). Dowieść, że pewne trzy kolejne wierzchołki tego wielokąta są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym niż $8/n^2$.

Zadanie 470 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązanie zadania M 1042.
Zauważmy, że $a \neq 1$. Niech p_i będzie takim dzielnikiem pierwszym liczby a, że $p_i \nmid a_i$. Taki dzielnik istnieje, gdyż w przeciwnym razie, gdyby każdy dzielnik pierwszy liczby a był dzielnikiem a_i, mielibyśmy $a \mid a_i^m$ dla dostatecznie dużego m. Ponieważ $a \mid a_i a_j$, więc $p_i \mid a_i a_j$ dla $i \neq j$, skąd $p_i \mid a_j$ (bo $p_i \nmid a_i$). Zatem wykazaliśmy, że dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant n$ istnieje taki dzielnik pierwszy $p_i \mid a$, że $p_i \nmid a_i$ i $p_i \mid a_j$ dla $j \neq i$. Stąd oczywiście $p_i \neq p_j$ dla $i \neq j$.

Rozwiązanie zadania M 1043.
Tak. Na przykład $a_i = p_1 \ldots p_{i-1} p_{i+1} \ldots p_n$, gdzie $p_1, \ldots, p_n$ są różnymi liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie zadania M 1044.
Nie. Z podzielności $a_1 a_5 \mid a_2 a_3 a_4$ i $a_1 a_4 \mid a_2 a_3 a_5$ wynika, że $a_1^2 a_4 a_5 \mid a_2^2 a_3^2 a_4 a_5$, skąd $a_1^2 \mid a_2^2 a_3^2$ i $a_1 \mid a_2 a_3$, wbrew założeniu zadania.