Iloczyn równy sumie

Rozpatrzmy równanie $xy = x + y$ w liczbach całkowitych dodatnich. Równanie to można zapisać w postaci $(x-1)(y-1) = 1$. Zatem $x - 1 = 1$ i $y - 1 = 1$, czyli $x = 2$ i $y = 2$.

Rozważmy teraz równanie $xyz = x + y + z$ w liczbach całkowitych dodatnich. Po podzieleniu obu stron przez xyz otrzymujemy $1 = 1/yz + 1/zx + 1/xy$. Załóżmy, że $x \leqslant y \leqslant z$, co ze względu na symetrię równania nie zmniejsza ogólności rozważań. Gdyby $x \geqslant 2$, to $1/yz \leqslant 1/4$, $1/zx \leqslant 1/4$, $1/xy \leqslant 1/4$ i w konsekwencji $1/yz + 1/zx + 1/xy \leqslant 3/4$, wbrew równaniu. Zatem $x = 1$ i równanie wyjściowe przyjmuje postać $yz = 1 + y + z$, czyli $(y-1)(z-1) = 2$. Stąd $y - 1 = 1$ i $z - 1 = 2$, czyli $y = 2$ i $z = 3$. Mamy więc rozwiązanie $(x, y, z) = (1, 2, 3)$, pozostałe rozwiązania są permutacjami tej trójki liczb.

Rozważmy teraz równanie $xyzt = x + y + z + t$ w liczbach całkowitych dodatnich. Dzielimy obie strony przez $xyzt$ i otrzymujemy $1 = 1/yzt + 1/xzt + {}$ ${}+1/xyt + 1/xyz$. Załóżmy, że $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$. Gdyby $x \geqslant 2$, to $1/yzt + 1/xzt + 1/xyt + 1/xyz \leqslant 1/8 + {}$ ${}+1/8 + 1/8 + 1/8 = 1/2$, wbrew równaniu. Zatem $x = 1$. Równanie przyjmuje postać $1 = 1/yzt + 1/zt + {}$ ${}+1/yt + 1/yz$. Gdyby $y \geqslant 2$, to $1/yzt + 1/zt + 1/yt + {}$ ${}+1/yz \leqslant 1/8 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 7/8$, wbrew równaniu. Zatem $y = 1$. Wyjściowe równanie wygląda teraz tak: $zt = z + t + 2$, czyli $(z-1)(t-1) = 3$. Wobec tego $z - 1 = 1$ i $t - 1 = 3$, czyli $z = 2$ i $t = 4$. Zatem mamy rozwiązanie $(x, y, z, t) = (1, 1, 2, 4)$ i wszystkie permutacje tej czwórki.

Wszystkie podane równania zapiszmy w postaci ogólnej:

$$x_1 x_2 \ldots x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Rozwiązanie każdego takiego równania wymaga indywidualnego podejścia w zależności od konkretnej wartości n. Łatwo jednak stwierdzić, że dla dowolnego n równanie to ma rozwiązanie, albowiem $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-2 \text{ jedynek}}, 2, n)$ je spełnia.

Nietrudno się zorientować, że zwiększając liczbę niewiadomych w równaniu, zwiększa się liczbę niewiadomych równych 1. Niech k będzie taką najmniejszą liczbą naturalną, że $2^k > n$. Załóżmy, że $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Wtedy $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant nx_n$, czyli $x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant nx_n$, skąd $x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \leqslant n < 2^k$. Wnioskujemy stąd, że co najwyżej $k - 1$ spośród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ jest większych od 1 (tj. większych lub równych 2) i tym samym co najmniej $n - k$ spośród niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jest równych 1. Na przykład dla $n = 1000000$ mamy $k = 20$, co oznacza, że w tym przypadku co najmniej 999980 niewiadomych jest równych 1.

Witold BEDNAREK

Zadania beznadziejne, czyli matematyk się bawi

Mało kto traktuje uprawianie matematyki jako zajęcie poważne – większość matematyków widzi w jej uprawianiu pasjonującą zabawę, emocjonującą rozrywkę, wciągającą grę. Aby to udokumentować, przytoczę tu dwa problemy, których stopień trudności gwarantuje, że jest to matematyka z górnej półki, a sztafaż wyraźnie wskazuje, że jest to zabawa.

Robaki. Jak wiadomo, robak to odcinek jednostkowy, z końcami oczywiście, położony na płaszczyźnie w dowolnie powyginany sposób. Każdy robak da się przykryć pokrywką (obszarem, który go zawiera) o dowolnie małym polu. Jak jednak mała może być pokrywka uniwersalna, czyli taka, którą można by przykryć każdego robaka? Najprostsza pokrywka uniwersalna, czyli koło, na pewno może mieć promień 1/2, a więc pole równe $\pi/4 \approx 0{,}785$. Oczywiście istnieją uniwersalne pokrywki o mniejszym polu. Aktualny, tegoroczny rekord, to uniwersalna pokrywka o powierzchni 0,2604370 – tak mikroskopijny obszar pozwala przykryć każdego robaka.

R. Norwood, G. Poole, *An Improved Upper Bound for Leo Moser's Warm Problem*, Discrete & Computational Geometry 29, No. 3(2003), 409–417.

A oto problem dla Czytelników *Delty*. Wyobraźmy sobie teraz pełną reprezentację robaków – każdy kształt w jednym egzemplarzu. Jak mało mogą one zająć miejsca, gdy się starannie skupią (ale przecinać się im nie wolno)? Czy miejsce to może być ograniczone? A gdy zapytamy o miejsce na tyle przyzwoite, żeby miało ono pole, to jak małe może to pole być?

Mgiełka. Przez każdy punkt kwadratu (niech będzie jednostkowy) prowadzimy jakąś prostą. Oczywiście prosta ta przechodzi także przez inne punkty kwadratu. Przechodzi też przez punkty spoza kwadratu. W wyniku tej operacji cały kwadrat jest zakreskowany. I tu zadanie. Zrobić to tak, żeby zakreskowany był tylko kwadrat, czyli tak, żeby punkty poza kwadratem, przez które przechodzą proste, były jak rzadziutka mgiełka, tak rzadka, by sumaryczne pole zamazanej części było równe polu kwadratu, czyli 1. Innymi słowy, mgiełka poza kwadratem – mimo że nieskończenie rozległa – ma mieć pole równe zeru. I tu każdy od razu powie, że to niemożliwe. Tymczasem można wykazać, iż nie tylko jest to możliwe, ale nawet tak bardzo, że przekreślonych punktów poza kwadratem będzie tak mało, iż zachowywać się będą jak liczby wymierne wśród wszystkich liczb rzeczywistych (uczenie: miara Lebesgue'a przekreślonych punktów dowolnego obszaru rozłącznego z kwadratem będzie równa zeru).

M. Csornyei, *How to make Davies' theorem visible*, Bull. London Math. Soc. 33(2001), 59–66.

M. K.