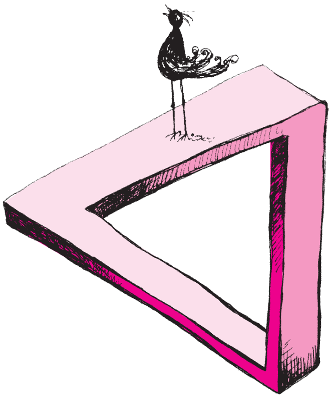


Ile kosztuje niepewność?

Monika SZYMKOWIAK

Czyż nie były ciekawe ostatnie wahania kursów walut? Na przykład euro lub dolara? Cóż, pewnie spora część Czytelników stwierdzi, że są ciekawsze obiekty obserwacji, chociażby zachody Słońca lub gromada kulista NGC 6823, ale czyż nie jest to z pewnych względów interesujące zjawisko? Skoro potrafimy obliczać trajektorie ciał niebieskich, znając warunki początkowe, czemu nie pokusić się o obliczenie trajektorii kursu złotówki do euro? Dysponujemy przecież pewnymi informacjami, które mogą nam w tym pomóc. Pomyślmy, ile korzyści (namacalnych!) przyniosłyby nam takie obliczenia!

Przykład? Proszę bardzo. Przypuśćmy, że do jeszcze lepszej obserwacji naszej gromady kulistej chcemy kupić nowy teleskop za pewną dużą kwotę w euro. Możemy go kupić dopiero za 3 miesiące, gdy dostaniemy honorarium za naszą świetną książkę o poszukiwaniu gwiazd zmiennych. Zresztą do tego czasu nie będzie nam potrzebny, będziemy zbyt zajęci kończeniem książki i negocjacjami z wydawcą. Kurs euro wynosi obecnie około 4 zł. Co będzie, jeśli za 3 miesiące wzrośnie on do, powiedzmy, 4,30? Łatwo obliczyć, ile stracimy. Hmmm, byłaby to w naszym budżecie niepożądana czarna dziura. Trzeba temu zapobiec!

Może zatem kupić euro dzisiaj? Po co czekać na niepewny los? Nie szkodzi, że nie mamy pieniędzy, pożyczymy je z banku, przecież już wkrótce będziemy mogli oddać! Oczywiście, nie pożyczymy za darmo. Banki też muszą z czegoś żyć, wiec pobierają za pożyczkę haracz według ustalonej na swój sposób stopy procentowej r. Ale to nic, euro, które kupimy, też ulokujemy w banku na procent r_E!

Spróbujmy tak:

1. Pożyczamy $QS\mathrm{e}^{-r_E T}$ złotych, za które kupimy $Q\mathrm{e}^{-r_E T}$ euro, gdzie S to kurs euro dziś, a Q – ilość euro, której potrzebujemy.
2. Kupujemy za to euro i lokujemy w banku.
3. Za 3 miesiące ($T = 0{,}25$ roku) wyjmujemy z banku Q euro.
4. Spłacamy pożyczkę w złotówkach:
$$Q\mathrm{e}^{-r_E T} S\mathrm{e}^{rT} = QS\mathrm{e}^{(r-r_E)T}.$$

Ile nas naprawdę kosztowało euro? Ano tyle, ile spłaciliśmy pożyczki. Za jedno euro zapłacimy faktycznie $F = S\mathrm{e}^{(r-r_E)T}$ zł. Czytelnik może sam obliczyć dla przykładowych wartości, czy to warte choćby jednego straconego na wszystkich tych operacjach zachodu Słońca. Dodam tylko, że tak naprawdę nie musimy wykonywać operacji 1–4, aby uzyskać powyższy efekt. Banki zawierają z klientami kontrakty terminowe (wiążące obie strony) na zakup lub sprzedaż walut. Są one dość popularne wśród firm, których zysk zależy od zmieniających się kursów walut. Cena ich wykonania powinna być jak najbliższa obliczonego powyżej F.

Gdyby nawet $F < S\mathrm{e}^{(r-r_E)T}$ przez chwilę, to natychmiast znaleźliby się chętni na zawarcie kontraktu kupna euro po cenie F za okres T, gdyż sprzedając dziś pożyczone euro, lokując złotówki w banku i po czasie T odkupując sprzedaną ilość euro po cenie F, osiągnęliby bez żadnego ryzyka zysk $S\mathrm{e}^{(r-r_E)T} - F$. Większy popyt na tego typu kontrakty zmniejszyłby cenę wykonania do odpowiedniej wartości. Podobny argument działa oczywiście w drugą stronę.

Zastanówmy się teraz, czy opisane wyżej rozwiązanie rzeczywiście jest najlepsze? A jeśli spodziewamy się, że kurs euro raczej spadnie (choć i wzrostu nie można wykluczyć)? Nie dość, że stracimy czas na zawieranie kontraktów, to jeszcze to wszystko na naszą zgubę! Może lepiej zawrzeć taki układ, z którego można się bez konsekwencji wycofać, jeśli nie będzie dla nas korzystny?

Taki układ nazywa się opcją. Jak sama nazwa mówi, jest to prawo – lecz nie konieczność – do zakupu lub sprzedaży określonej rzeczy (w naszym przypadku waluty) w określonym terminie po określonej cenie. Gdy przyjdzie czas, możemy zdecydować: korzystamy z opcji lub nie. To ciekawsze rozwiązanie, prawda? Nie ma, niestety, nic za darmo! Za opcję trzeba zapłacić. To rodzaj „ubezpieczenia” przed rosnącym lub malejącym kursem waluty. Tak jak w przypadku ubezpieczenia, jeśli nikt nie zaleje nam mieszkania, zapłacona składka przepadnie!

Ile powinna kosztować taka opcja? Skrupulatny Czytelnik odpowie zapewne: to zależy od tego, jak definiujemy słowo „powinna”! Postąpmy więc systematycznie i poczyńmy pewne dość rozsądne, choć czasami daleko idące założenia. Rozważmy model najprostszy z najprostszych:

1. Zakup walut i umieszczenie ich w banku nie wiąże się z większym ryzykiem niż bezpośrednie lokowanie pieniędzy w banku i spodziewany zysk z obu operacji jest taki sam.
2. Stopy procentowe pożyczki i depozytu są takie same.
3. Nie ponosimy żadnych kosztów „manipulacyjnych” związanych z transakcjami.
4. Spodziewamy się, że za czas T cena euro przyjmie jedną z dwóch wartości: albo $S \cdot u > X$, albo $S \cdot d < X$, gdzie X to cena wykonania opcji, a S – cena dzisiejsza.

Oznaczmy prawdopodobieństwo, że cena wzrośnie, jako p. Wartość naszej opcji P dziś wyniesie więc

$$e^{-rT}[(Su - X)\cdot p + 0\cdot(1-p)].$$

Do obliczeń brakuje nam wartości p. By ją obliczyć, skorzystamy z pierwszego założenia. Wartość oczekiwana inwestycji w euro wynosi $E(S_T) = Se^{rT}$, czyli

$$e^{r_E T}[Su\cdot p + Sd\cdot(1-p)] = Se^{rT}.$$

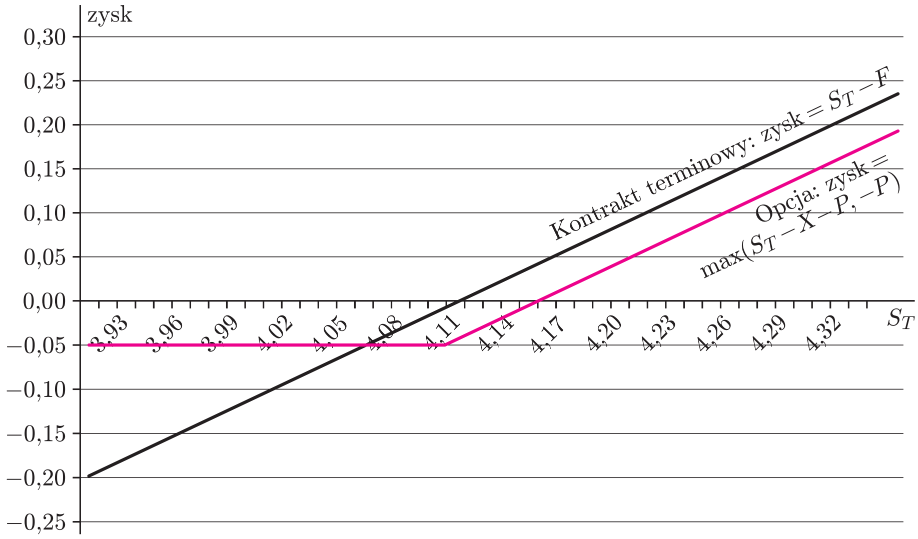
Skąd

$$p = \frac{e^{(r-r_E)T} - d}{u-d},$$

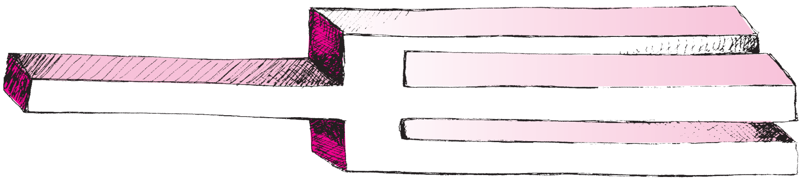
więc cena opcji wynosi:

$$P = e^{-rT}(Su - X)\frac{e^{(r-r_E)T} - d}{u-d}.$$

Co więc jest lepsze? Kontrakt terminowy czy opcja? Weźmy przykładowe wartości $S = 4$, $u = 1{,}05$, $d = 0{,}98$, $X = 4{,}1$ i spójrzmy na wykres naszego zysku.



Jak widać, w przypadku wzrostu ceny euro kontrakt terminowy jest zyskowniejszy. Jednak w przeciwnym przypadku wiąże się z większą niż opcja stratą. Oprócz wielu innych jest jeszcze najprostsze rozwiązanie: nie robimy nic i liczymy na łut szczęścia. Taka możliwość nic nie kosztuje, bo wiąże się z nią ryzyko teoretycznie nieskończone…



Zadania

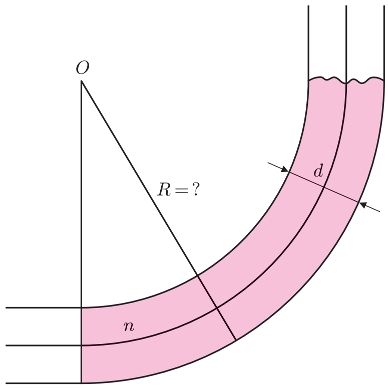
Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

M 1042. Niech $a_1, \ldots, a_n$ i a będą takimi liczbami naturalnymi, że $a \mid a_i a_j$ oraz $a \nmid a_i^m$ dla dowolnych liczb naturalnych m i $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, $i \neq j$. Udowodnić, że a ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.
Rozwiązanie na str. 15

M 1043. Czy dla dowolnego $n \geqslant 3$ istnieją takie liczby naturalne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $a_i \nmid a_j$, ale $a_i \mid a_j a_k$ dla dowolnych parami różnych liczb i, j, k ?
Rozwiązanie na str. 15

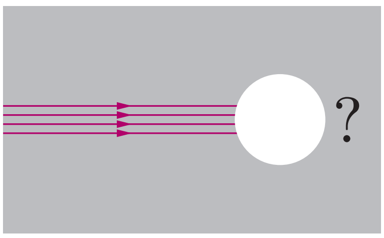
M 1044. Czy dla dowolnego $n \geqslant 5$ istnieją takie liczby naturalne $a_1, a_2, \ldots, a_n$, że $a_i \nmid a_j a_k$, ale $a_i a_j \mid a_k a_l a_m$ dla dowolnych parami różnych i, j, k, l, m ?
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

F 607. Ile powinien wynosić zewnętrzny promień skrętu światłowodu, wykonanego z przezroczystej substancji o współczynniku załamania $n = 4/3$, aby dla promienia przekroju światłowodu, równego $d = 1$ mm, światło, wchodzące do światłowodu prostopadle do płaszczyzny przekroju (rys. 1), rozchodziło się dalej, nie wychodząc poza brzeg powierzchni bocznej?
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

F 608. W ośrodku o współczynniku załamania $n = 1{,}3$ rozchodzi się wąska wiązka światła o przekroju kolistym (rys. 2). Ta wiązka wchodzi prostopadle do kulistej dziury (pustej), której promień jest dużo większy od promienia wiązki. Ile razy wiązka światła będzie szersza po wyjściu z dziury?
Rozwiązanie na str. 16