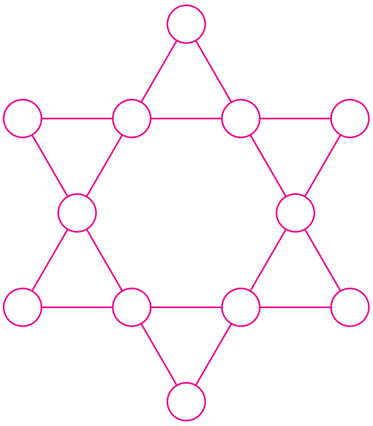
Droga do gwiazd...

Paweł KUBIT

Rozważmy takie zadanie:

Liczby ze zbioru $\{1, \ldots, 12\}$ *należy rozmieścić w* 12 *wolnych polach* (rys. 1), *tak by suma każdej czwórki liczb połączonych odcinkiem była stała i wynosiła* 26.

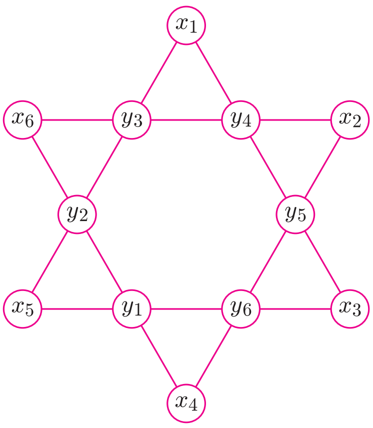


Rys. 1

Nasuwają się pytania:

(1) Ile jest możliwych rozwiązań i jak ich szukać?

(2) Co się stanie, jeśli weźmiemy inną liczbę niż 26 – jako sumę?



Rys. 2

Przy oznaczeniach, jak na rysunku 2, warunki zadania mówią, iż

$$(*)\quad \begin{array}{ll} x_2 + y_4 + y_3 + x_6 = 26, & x_1 + y_4 + y_5 + x_3 = 26, \\ x_2 + y_5 + y_6 + x_4 = 26, & x_1 + y_3 + y_2 + x_5 = 26, \\ x_6 + y_2 + y_1 + x_4 = 26, & x_5 + y_1 + y_6 + x_3 = 26. \end{array}$$

Pytanie (2) jest łatwe. Każda zmienna w układzie $(*)$ pojawia się dwa razy (gdyż przez każde kółko na rysunku 1 przechodzą dokładnie dwa odcinki). Zatem po dodaniu stronami wszystkich równań $(*)$, gdzie liczbę 26 zastąpimy przez s, mamy:

$$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \\ + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6) = \\ = 2(1 + \ldots + 12) = 156 = 6s.$$

Czyli $s = 26$.

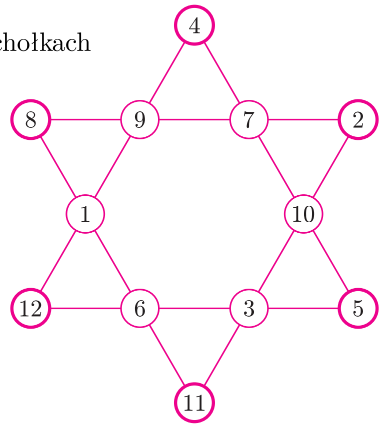
Można obliczyć:

$$x_j = \frac{26 - Y}{2} + y_j + y_{j-1},$$

gdzie $Y = y_1 + \ldots + y_6$, przyjmujemy $y_0 = y_6$.
A więc $x_j = f(y_1, \ldots, y_6)$ dla $j = 1, \ldots, 6$.
Ze wzoru tego wynika, że wśród liczb y_j dwie lub cztery są parzyste. Natomiast nie da się obliczyć $y_j = g(x_1, \ldots, x_6)$.

Szukałem rozwiązań na komputerze, jak też „z ołówkiem w ręku” (jest to trudne). Podam trzy przykładowe rozwiązania i zobaczymy bardzo ciekawe ich własności.

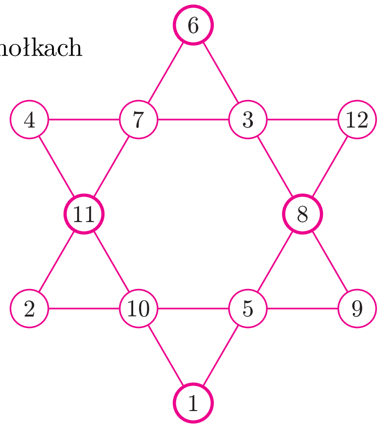
Rysunek 3 ilustruje, że sumy liczb w wierzchołkach nałożonych trójkątów są równe $39 - Y/2$.



Rys. 3. $Y = 36$.

Na rysunku 4 widzimy, iż suma liczb w wierzchołkach powstałego rombu jest równa 26.

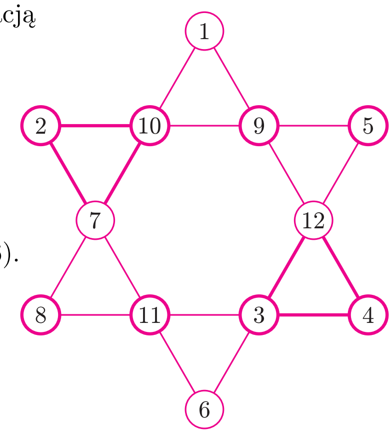
$(6 + 11 + 8 + 1 = 26)$



Rys. 4. $Y = 44$.

Rysunek 5 jest ilustracją faktu, że sumy liczb w wierzchołkach powstałych równoległoboków są równe 26.

$(2 + 9 + 11 + 4 =$
$= 10 + 5 + 8 + 3 = 26)$.



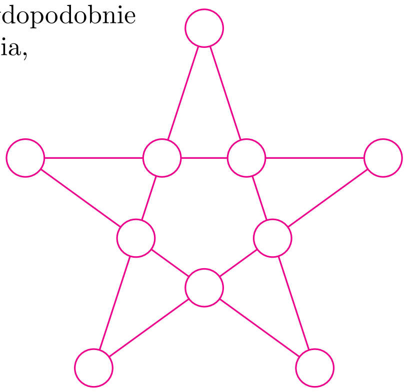
Rys. 5

Wreszcie: sumy liczb w dwóch przeciwległych sobie trójkącikach (np. tych zaznaczonych grubszą linią) są równe. Wynika to np. ze wzoru na x_j. Istnieje nawet rozwiązanie, w którym liczby 11 i 12 są na wspólnym odcinku ($y_i = 3, 8, 10, 2, 11, 4$).

W gwieździe m-ramiennej suma po każdym odcinku musi być równa $4m + 2$. Rozmieszczamy liczby ze zbioru $\{1, \ldots, 2m\}$. Otrzymujemy m równań z $2m$ niewiadomymi. Mamy więc do sprawdzenia $(2m)!/m!$ układów (o ile umiemy obliczyć $x_j = f(y_1, \ldots, y_m)$).

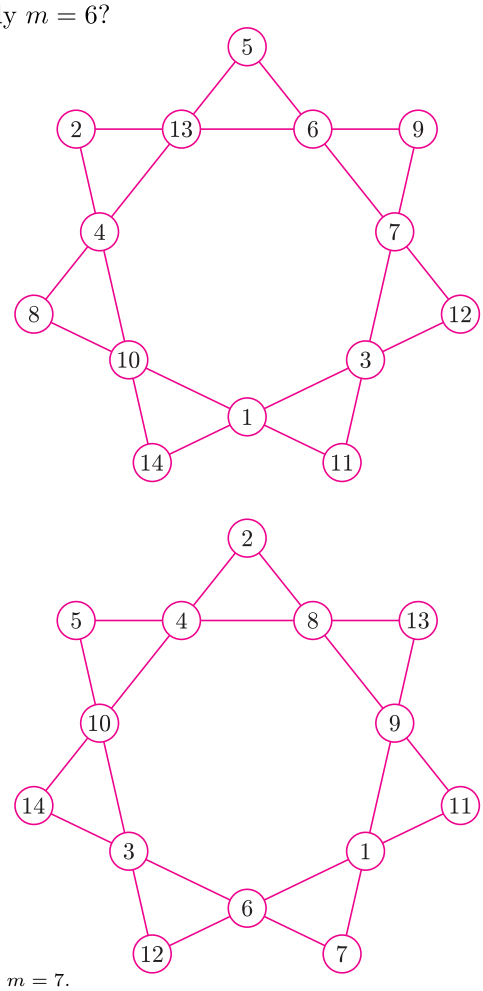
Powstaje pytanie: dla jakich m istnieje rozwiązanie?

Gdy $m = 5$, prawdopodobnie nie ma rozwiązania, nie znam jednak dowodu, iż tak jest istotnie...



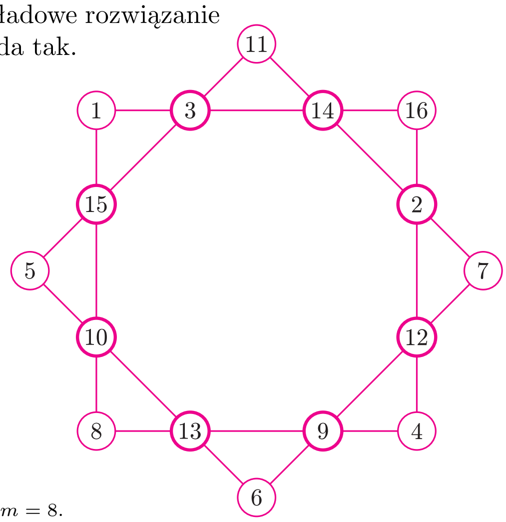
Rys. 6. $m = 5$.

Gdy $m = 7$, odpowiedź jest twierdząca. Jak wyglądają tu wzory na $x_j = f(y_1, \ldots, y_7)$ i czy można znaleźć jakieś ciekawe własności rozwiązań – jak uczyniliśmy to, gdy $m = 6$?



Rys. 7. $m = 7$.

Przypadek $m = 8$ jest szczególnie ciekawy... Przykładowe rozwiązanie wygląda tak.



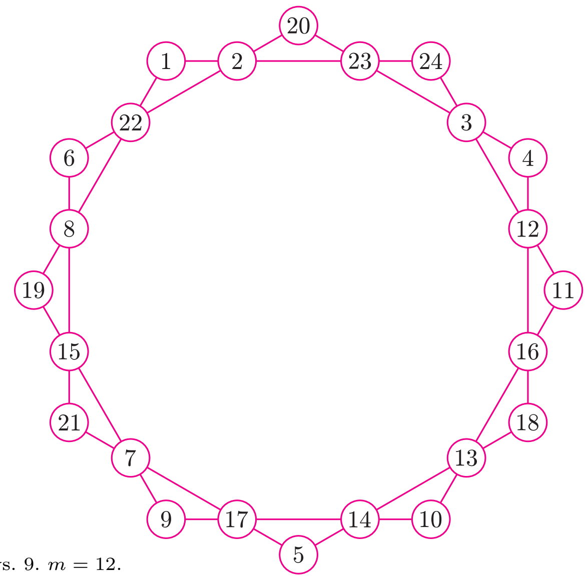
Rys. 8. $m = 8$.

Można tu zauważyć następujące własności.

Pierwsza: sumy liczb w wierzchołkach nałożonych kwadratów (tworzących gwiazdę) są równe $(1 + 16 + 4 + 8 = 5 + 11 + 7 + 6)$.
Druga: $10 + 13 + 2 + 14 = 15 + 3 + 9 + 12 =$
$= 3 + 14 + 9 + 13 = 10 + 15 + 2 + 12$.

Gdy $m = 10$, rozwiązanie może być np. takie: $y_j = 2, 19, 4, 7, 17, 5, 8, 12, 10, 18$ (punkty wewnętrzne gwiazdy), w wierzchołku leżącym najbliżej y_1 i y_2, $x = 16$.

Na koniec przypadek $m = 12$. Każde rozwiązanie (np. to, które widać na rysunku 9) ma następującą własność: sumy liczb w wierzchołkach obu sześciokątów są równe $(20 + 4 + 18 + 5 + 21 + 6 =$
$= 1 + 24 + 11 + 10 + 9 + 19)$ i w konsekwencji punkty wewnętrzne gwiazdy y_j dzielą się na dwie szóstki o równej sumie.
$22 + 2 + 12 + 16 + 17 + 7 = 23 + 3 + 13 + 14 + 15 + 8 =$
$= 2 + 23 + 16 + 13 + 7 + 15 = 3 + 12 + 14 + 17 + 8 + 22$.



Rys. 9. $m = 12$.

Nie wiem, czy są jeszcze jakieś inne własności takich rozwiązań, oraz czy istnieje $m > 5$, dla którego nie ma rozwiązania...