Pozorna trudność

Oto zadanie:

Trójkąt ABC jest równoboczny i ma bok o długości 1. Jaką figurę tworzą punkty P opisane przez warunek

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2?$$

Zadanie to może być trudne, gdy patrzy się na nie z osobna. Nawet nie pomaga wskazówka, że jest to okrąg. Ani nawet, że jest to okrąg opisany na trójkącie ABC. Bo jak to udowodnić?

Natomiast rzecz staje się łatwa, gdy staniemy przed pozornie znacznie bardziej skomplikowanym zadaniem:

Udowodnić, że na płaszczyźnie figura, którą tworzą punkty P opisane równaniem

$$\alpha_1 \cdot A_1P^2 + \alpha_2 \cdot A_2P^2 + \ldots + \alpha_n \cdot A_nP^2 = \lambda$$

niezależnie od położenia punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$, jest
– okręgiem, punktem lub zbiorem pustym, gdy $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$,
– płaszczyzną, prostą lub zbiorem pustym, gdy $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$.

Zostawiając na chwilę problem dowodu, widzimy, że w naszym początkowym zadaniu rzeczywiście otrzymujemy okrąg opisany, bo każdy z punktów A, B, C należy do tej figury (mamy wtedy $1^2 + 1^2 = 2$), a suma współczynników jest $1 + 1 + 1 \neq 0$.

Ale dlaczego dowód tego ogólnego twierdzenia należy uznać za łatwy? Dlatego, że wiedząc, jak ogólna jest to prawidłowość, odpowiednio dobieramy środki dowodowe. Nie może być to np. nic związanego z położeniem danych punktów itd. I wtedy jedyne, co nam pozostaje, to jakaś prawidłowość algebraiczna, a więc stosownym środkiem będzie użycie do rozwiązania współrzędnych. Od tego momentu wszystko już idzie łatwo. Każde z sumowanych wyrażeń jest postaci

$$\alpha_i\big((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\big),$$

gdzie $P = (x, y)$ i $A_i = (x_i, y_i)$, czyli postaci

$$\alpha_i(x^2 + y^2) + \gamma_i x + \delta_i y + \theta_i,$$

przy czym dokładną wartość γ_i, δ_i i θ_i można łatwo obliczyć (choć nie warto). Interesująca nas suma to

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x^2 + y^2) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x + \sum_{i=1}^{n} \delta_i y + \sum_{i=1}^{n} \theta_i.$$

I teraz, gdy suma α_i jest różna od zera, możemy przez nią podzielić dowodzoną równość, otrzymując równość postaci

$$x^2 + y^2 + \Gamma x + \Delta y + \Theta = \Lambda,$$

gdzie łatwo obliczyć wartości Γ, Δ, Θ i Λ (ale też nie warto). Powyższą równość można zapisać jako

$$(*) \qquad \left(x + \frac{1}{2}\Gamma\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\Delta\right)^2 = \Lambda - \Theta + \frac{1}{4}\Gamma^2 + \frac{1}{4}\Delta^2.$$

Oznaczmy prawą stronę równości przez Ξ. Jeśli $\Xi > 0$, to równanie $(*)$ przedstawia okrąg o środku $\left(-\frac{1}{2}\Gamma, -\frac{1}{2}\Delta\right)$ i promieniu $\sqrt{\Xi}$. Gdy $\Xi = 0$, okrąg ma promień zerowy, czyli jest punktem. Wreszcie dla $\Xi < 0$ otrzymujemy zbiór pusty. Z kolei gdy suma α_i jest zerowa, mamy równanie postaci

$$\Upsilon x + \Phi y = \Psi,$$

(wartości Υ, Φ i Ψ znów łatwo obliczyć i znów nie warto), które dla $\Upsilon = \Phi = 0$ przedstawia płaszczyznę, gdy $\Psi = 0$, lub zbiór pusty, gdy $\Psi \neq 0$. W pozostałych przypadkach jest to równanie stopnia 1, czyli równanie prostej.

Oczywiście, korzystając z tej ogólnej prawidłowości można ułożyć wiele konkretnych zadań, takich jak to, od którego zaczęliśmy. Przez swoją szczegółowość mogą one niejednemu sprawić sporo kłopotów.

Marek KORDOS

Rozwiązanie zadania M 1039.
Jeśli

$$[\sqrt{n+1}] = [\sqrt{n}],$$

to

$$\frac{n+1}{[\sqrt{n+1}]} > \frac{n}{[\sqrt{n}]},$$

więc $a_{n+1} > a_n$. Mamy

$$[\sqrt{n+1}] > [\sqrt{n}] \iff n + 1 = m^2$$

dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Jeśli $n + 1 = m^2$, to

$$a_{n+1} = \left[\frac{m^2}{m}\right] = m$$

oraz

$$a_n = \left[\frac{m^2 - 1}{m - 1}\right] = m + 1.$$

Szukanymi liczbami są zatem liczby postaci $m^2 - 1$.

Rozwiązanie zadania M 1040.
Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left[\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$$

lub

$$\left[\sqrt{n+1} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n} + \frac{3}{2}\right].$$

Drugi przypadek zachodzi wtedy, gdy $\{\sqrt{n+1}\} > \frac{1}{2}$ oraz $\{\sqrt{n}\} < \frac{1}{2}$. To oznacza, że

$$\sqrt{n+1} > [\sqrt{n+1}] + \frac{1}{2} = a + \frac{1}{2}$$

oraz

$$(*) \qquad \sqrt{n} < [\sqrt{n}] + \frac{1}{2} = a + \frac{1}{2},$$

$(a \overset{\text{ozn}}{=} [\sqrt{n+1}])$, gdyż jeśli

$$[\sqrt{n}] = [\sqrt{n+1}] - 1,$$

to

$$n = a^2 - 1,$$

ale wówczas

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 - 1} \not< [\sqrt{n}] + \frac{1}{2} = a - \frac{1}{2}$$

dla $a \geqslant 2$. Nierówności $(*)$ możemy zapisać w postaci

$$n + 1 > a^2 + a + \frac{1}{4}$$

oraz

$$n < a^2 + a + \frac{1}{4},$$

czyli $n = a^2 + a$, c.n.d.