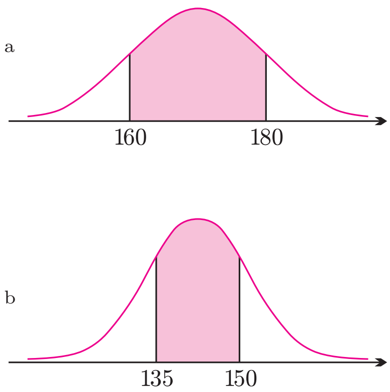
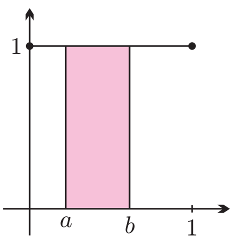
Piłkarz idealny

Przeglądając dane statystyczne dotyczące rozmaitych zjawisk, trafiamy dość często na obrazki jak z rysunku 1. Dlaczego obrazki te mają tak podobny kształt? Dlaczego przypominają mniej lub bardziej spłaszczony dzwon? Czy musi tak być zawsze? Czy różne dzwony dają się na siebie nałożyć po odpowiednim przeskalowaniu? To ciekawe pytania, ale odpowiedzi na nie są trudne, więc ich nie udzielimy. Poniżej spróbujemy tylko naszkicować pewien mechanizm, który „proste wykresy wygina w dzwony”. Rzecz dotyczyć będzie futbolu.



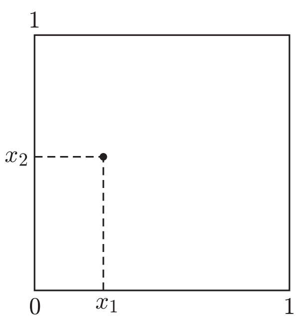
Rys. 1 Pole pod całym wykresem na obu obrazkach jest równe 1. Pole kolorowej części to – powiedzmy – procent czytelników o wzroście pomiędzy 160 cm i 180 cm (rys. a) oraz procent czytelników o ilorazie inteligencji między 135 a 150 (rys. b).

Bardzo dobry piłkarz powinien wykazywać się przynajmniej trzema umiejętnościami: 1) przyjęcia piłki 2) podania piłki 3) myślenia na boisku. Każdą z tych umiejętności ocenimy w skali od 0 do 1, tak że najbardziej beznadziejny futbolista – tu wstrzymamy się od podania przykładów – otrzyma ocenę zero, a Roberto Carlos, Raul czy też Mirek Szymkowiak ocenę 1. Założymy, że poszczególne zdolności są równomiernie rozłożone między piłkarzy, tzn. szansa, że losowo wybrany piłkarz otrzyma za daną umiejętność ocenę z przedziału $(a, b) \subset [0, 1]$, jest równa długości tego przedziału. W takim razie wykres opisujący np. rozkład umiejętności przyjęcia piłki wygląda jak na rysunku 2. Wykres jest zatem całkiem płaski i żadnego dzwonu, jak na razie, nie widać. Zobaczmy jednak, co się stanie, gdy dodamy ocenę za podanie i przyjęcie.

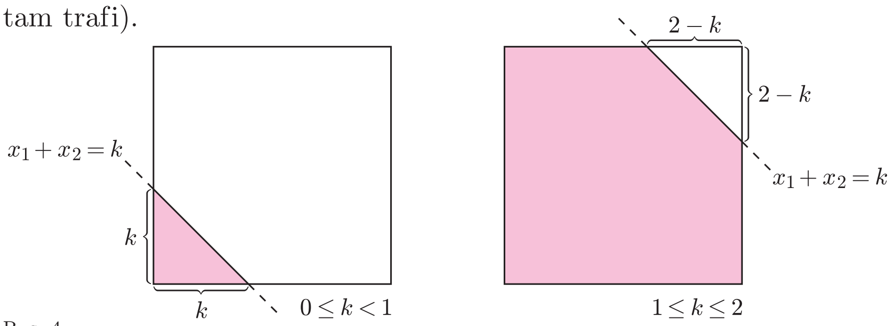


Rys. 2. Pole kolorowej części to szansa, że losowo wybrany piłkarz przyjmuje piłkę na ocenę z przedziału (a,b).

Maksymalna nota – 2, minimalna – 0. Zauważmy, że ocenę obu umiejętności możemy przedstawić jako punkt w kwadracie (rys. 3). O całej sprawie możemy zatem myśleć, jak o losowaniu punktu z kwadratu o boku 1. Suma ocen będzie mniejsza od k, gdy suma współrzędnych punktu będzie mniejsza od k. Spoglądając na rysunki poniżej widzimy, że szansa na to jest równa $\frac{1}{2}k^2$ dla k między 0 i 1 oraz $1 - \frac{1}{2}(2-k)^2$ dla k między 1 a 2, gdyż szansa na to, że losowo wybrany punkt będzie należał do pewnego obszaru kwadratu jednostkowego, jest równa polu tego obszaru (im większe pole, tym większa szansa, że punkt tam trafi).



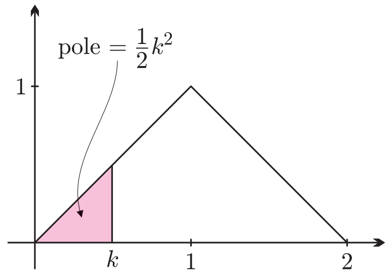
Rys. 3. Ocena za przyjęcie piłki to x_1, a za podanie – x_2.



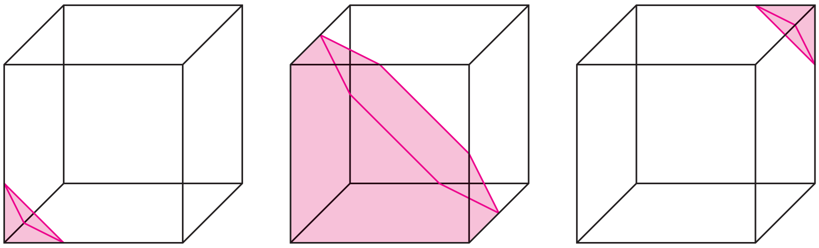
Rys. 4.

Przedstawiając wynik na wykresie, otrzymujemy rysunek 5. Widać już, że wykres nieco się wygiął, może nawet przypomina trochę dzwon, ale jest strasznie kanciasty.

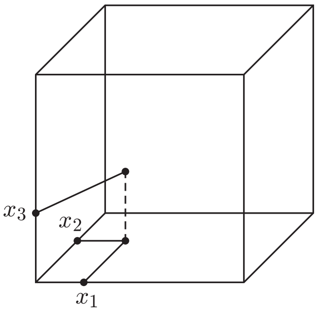
Zobaczmy zatem, co się zdarzy, gdy dodamy trzy oceny: za przyjęcie, za podanie i za myślenie.



Rys. 5

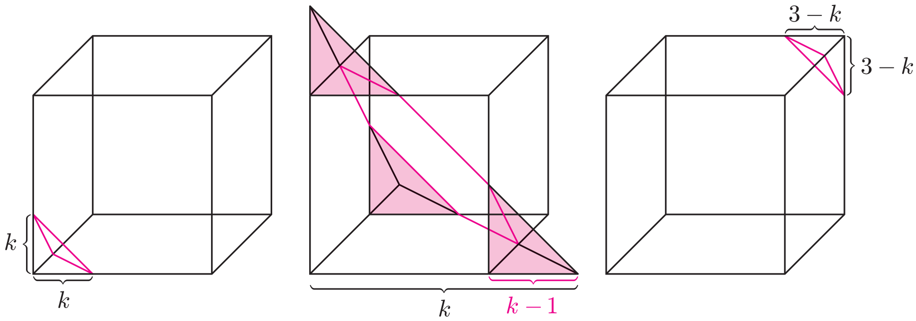


Rys. 6

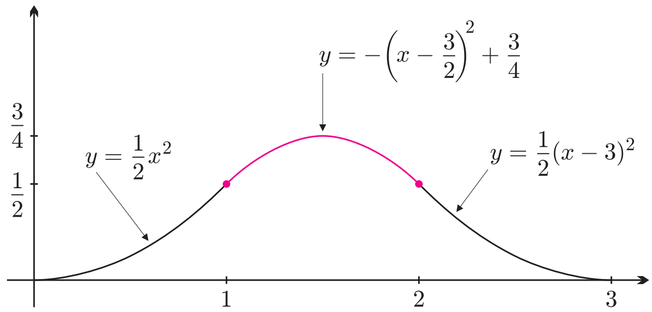


Rys. 7

Maksymalna nota – 3, minimalna – 0. Zauważmy, że łączną ocenę możemy przedstawić jako punkt w sześcianie. Jaka jest szansa, że suma ocen tzn. suma współrzędnych wylosowanego punktu w sześcianie jest mniejsza od k? Na powyższych rysunkach zaznaczone są kolorem obszary, w których punkty mają sumę współrzędnych mniejszą od k. Wystarczy zatem obliczyć objętości kolorowych obszarów. Spoglądając na kolejną serię rysunków,



Rys. 8



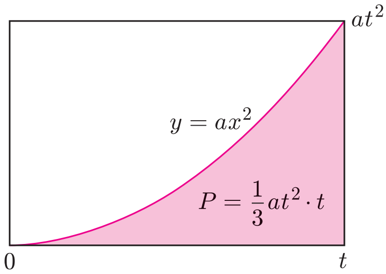
Rys. 9

zauważamy, iż szansa na to, że suma ocen jest mniejsza od k, wynosi (rys. 8)

- $\frac{1}{6}k^3$ dla $k\in[0,1)$;
- $\frac{1}{6}k^3-3\cdot\frac{1}{6}(k-1)^3$ dla $k\in[1,2)$;
- $1-\frac{1}{6}(3-k)^3$ dla $k\in[2,3]$.

Wynik ten można przedstawić na wykresie z rysunku 9.

Czytelnik, który chciałby przekonać się, czy go nie oszukaliśmy, może sprawdzić poprawność wykresu, stosując wzór na pole kolorowego obszaru z rysunku 10.



Rys. 10

Podsumujmy nasze rozważania. Chociaż rozkład poszczególnych umiejętności był płaski, to ich suma miała już wykres bardzo przypominający dzwon! Kluczowe było tu jednak założenie, że poszczególne umiejętności są niezależne. To właśnie ta niezależność wyginała wykres w dzwon.

Jakkolwiek zdolność przyjęcia piłki jest związana z myśleniem w sposób dość luźny, to jednak niezależność ocen przyjęcia i podania jest już niestety bardziej problematyczna.

Polecamy też Czytelnikowi obliczenie, jaka jest szansa, że losowo wybrany piłkarz ma łączną ocenę trzech umiejętności w przedziale
a) [1,4;1,6],
b) [2,8; 3].
Wynik obliczeń powinien przekonać, że trudno być doskonałym...

Małą Deltę przygotował Witold SADOWSKI