Kłopoty z regułą Bayesa

Marcin STERKOWIEC

Nie zdziwiłoby mnie zaskoczenie niektórych Czytelników tytułem poniższego tekstu. Jakież kłopoty sprawiać może twierdzenie Bayesa? Trudno chyba o stwierdzenie bardziej jasne i niekontrowersyjne. Poniżej sformułuję je w sposób nieco specyficzny; rozpatrzmy bowiem pewne nietypowe zdarzenie „losowe”.

H: *Pierwszy mistrz świata w szachach był Angielką/Anglikiem.*

W istocie losowości trudno się tu doszukać: pierwszy mistrz świata w szachach albo był Anglikiem, albo nie był – możemy to ustalić na podstawie danych historycznych. Jednakże każdy z Czytelników może samodzielnie ustalić swoje własne (subiektywne) „prawdopodobieństwo” prawdziwości powyższej hipotezy, przy całej swojej osobistej wiedzy. Ale jak wpłynie na opinie Czytelników dodatkowa informacja, że pierwszym mistrzem świata w szachach był urodzony w Pradze Wilhelm Steinitz?

Oznaczmy dane dodatkowe symbolem D oraz niech $P(H)$ oznacza naszą wstępną opinię na temat prawdziwości hipotezy H. Zatem twierdzenie Bayesa możemy wyrazić następująco:

$$P(H|D) = P(D|H)P(H)/P(D),$$

gdzie:

$P(D)$ – prawdopodobieństwo tego, że zachodzi D (zanim otrzymaliśmy informację o D),

$P(H|D)$ – prawdopodobieństwo prawdziwości hipotezy z uwzględnieniem dodatkowej informacji D,

$P(D|H)$ – prawdopodobieństwo tego, że zachodzi D, przy założeniu prawdziwości hipotezy H.

Co ważne, twierdzenie Bayesa stanowi normatywnie optymalną regułę w procesie wnioskowania. Możemy stosunkowo łatwo eksperymentalnie sprawdzić, czy ludzie popełniają systematyczne błędy w procesie wnioskowania bayesowskiego i temu poświęcony jest poniższy tekst. Jak się okaże, intuicja w tego typu sytuacjach bardzo nas zawodzi, ale, uprzedzę, nie musimy rwać włosów z głowy: istnieje wiele innych przypadków, gdy żadne twierdzenia nie zastąpią intuicji i zdrowego rozsądku.

1. Farmer czy bibliotekarz? Spójrzmy na poniższy opis pewnej osoby.

Stefan jest bardzo nieśmiały i zamknięty w sobie, niezmiernie życzliwy i pomocny, lecz przy tym niezbyt zainteresowany ludźmi i rzeczywistością. Łagodna i czysta dusza, ma silną potrzebę porządku, systematyczności i zamiłowanie do detali.

Badane osoby zapytano, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że Stefan zajmuje się konkretnym zawodem (np. jest farmerem, sprzedawcą, pilotem, bibliotekarzem lub fizykiem). Okazało się, że badani najczęściej wskazywali na możliwość, że Stefan jest bibliotekarzem. Najwyraźniej nie brali pod uwagę faktu, że w społeczeństwie odsetek bibliotekarzy jest znikomy, podczas gdy ogromna jest ilość np. farmerów. Badani najwyraźniej mylili podobieństwo z prawdopodobieństwem lub, innymi słowy, stosowali heurystykę podobieństwa. W swoim wnioskowaniu niemal całkowicie pomijali prawdopodobieństwo $P(H)$, tj. prawdopodobieństwo tego, że Stefan jest bibliotekarzem, przy braku jakiegokolwiek opisu. Trzeba jednak przyznać, że w tym przypadku nie dostali żadnej wskazówki, by skorzystać z tej wstępnej informacji. Jednakże okazuje się, że wyraźne wskazówki niewiele pomagają, jak pokazują wyniki następnego eksperymentu.

2. Inżynier czy prawnik? Badanym przedstawiono krótkie opisy osób rzekomo wylosowanych z próbki stu osób: inżynierów i prawników. Zadaniem badanych było oszacowanie, przy użyciu otrzymanego opisu, prawdopodobieństwa prawdziwości hipotezy H, że wylosowana osoba jest inżynierem. Eksperyment prowadzono w dwu grupach: część badanych została poinformowana, że wśród stu osób było 70 inżynierów i 30 prawników, druga grupa dowiedziała się, że losowano spośród 30 inżynierów i 70 prawników. Stosując regułę Bayesa, możemy ustalić, jaki powinien być iloraz szacowanych w obu grupach prawdopodobieństw.

W pierwszej grupie: $P_1(H|D) = P(D|H) \cdot 0{,}7/P(D)$,

w drugiej grupie: $P_2(H|D) = P(D|H) \cdot 0{,}3/P(D)$,

a zatem: $P_1(H|D)/P_2(H|D) = 7/3$.

Okazało się jednak, że oszacowania prawdopodobieństwa w obu grupach były niemal jednakowe, co sugeruje, że badani ignorowali bazowe prawdopodobieństwa $P(H)$ (używali ich tylko wtedy, gdy nie otrzymali żadnej dodatkowej informacji, a ignorowali nawet wtedy, gdy dodatkowy opis nie niósł ze sobą żadnej istotnej informacji – typową odpowiedzią było w tych przypadkach $P(H|D) = 0{,}5$). Badania te wielokrotnie powtarzano, używając różnorodnych bodźców zachęcających do jak najdokładniejszego szacowania.

3. Konserwatyzm. Poniższy eksperyment będzie ilustracją całkiem odmiennego zjawiska. Rozważmy następujące zadanie: mamy dwie urny, w jednej z nich 70% kul jest czerwonych i 30% niebieskich, natomiast w drugiej proporcja jest odwrotna. Losujemy jedną z tych urn i pobieramy 10 kul (ze zwracaniem), z których sześć okazuje się być czerwonych, a cztery – niebieskie. Proszę powiedzieć: jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybraną urną była ta, która zawierała więcej kul czerwonych?

Zabierzmy się do tego zadania w sposób systematyczny. Hipotezą naszą jest więc H: wylosowaliśmy urnę zawierającą 70% kul czerwonych, a bazowe prawdopodobieństwo wynosi $P(H) = 0{,}5$.

Dodatkową informacją jest D: wylosowaliśmy 6 kul czerwonych i 4 niebieskie, a zadaniem jest ustalenie prawdopodobieństwa $P(H|D)$. Zgodnie z regułą Bayesa mamy

$$P(H|D) = P(D|H)P(H)/P(D),$$

a ponadto wiemy, że

$$P(D) = P(D|H)P(H) + P(D|\text{nie}H)P(\text{nie}H).$$

Losowanie kul ze zwracaniem możemy traktować jak schemat Bernoulliego, więc

$$P(D|H) = 10!/(6!4!) \cdot 0{,}7^6 \cdot 0{,}3^4 \approx 0{,}20012$$

oraz

$$P(D|\text{nie}H) = 10!/(6!4!) \cdot 0{,}3^6 \cdot 0{,}7^4 \approx 0{,}03676.$$

Zatem $P(H|D) \approx 0{,}84$. Właśnie takie zadanie postawiono wielu osobom badanym i okazało się, że intuicja bardzo je zawodziła: typowe odpowiedzi zawierały się w przedziale 0,6–0,7, co znacznie odbiega od wyniku, który otrzymaliśmy wyżej, stosując regułę Bayesa. Podobny wynik uzyskiwano w wielu analogicznych badaniach, a efekt ten określono mianem konserwatyzmu: badane osoby nie były skłonne zbytnio „oddalić się” od prawdopodobieństwa bazowego (tu: 0,5).

4. Reguła Bayesa a rzeczywistość (warunkowa zależność i niepewne dane). Powyższe eksperymenty pokazują, jak poważne trudności sprawia nam praktyczne użycie tak nieskomplikowanego twierdzenia jak reguła Bayesa. Jednakże – choć matematycznie proste – okazuje się ono całkiem „nieintuicyjne” i zupełnie nieprzystające do zdolności, jakie posiada człowiek, a ściślej – jego mózg. Niemniej wykazano, że można znacznie poprawić prawidłowość procesu wnioskowania bayesowskiego, sugerując badanym odpowiednie ustrukturalizowanie problemu (może to oznaczać, że początkowo badani mieli w swych umysłach niewłaściwą strukturę problemu). Najbardziej oczywistym przykładem strukturyzacji problemu jest akapit tego tekstu zaczynający się od słów „zabierzmy się do tego problemu w sposób systematyczny”. Badania pokazały, że najlepsze wyniki we wnioskowaniu bayesowskim osiągamy, jeśli dwie informacje wydają się jednakowo istotne, natomiast kłopoty w ich zagregowaniu powstają, jeśli jedna wydaje się znacznie ważniejsza od drugiej. To może wyjaśniać kłopoty w zadaniu „inżynier czy prawnik”: bazowe prawdopodobieństwo 0,7 lub 0,3 to „tylko” liczba i może wydawać się niczym w porównaniu z pisemnym, żywym opisem człowieka.

W świetle przedstawionych informacji zasadne wydaje się pytanie, jak istotne są konsekwencje tak znaczących ograniczeń w naszych zdolnościach. Na pewno nie są one bez znaczenia, jednakże ważne jest, że w naszym codziennym życiu stosunkowo rzadko zdarza się nam napotykać problemy „laboratoryjne”, tj. wymagające tej właśnie metody wnioskowania. W szczególności wiele problemów dotyczy danych niepewnych (np. dostajemy informację, że „Kowalski usłyszał od Nowaka, że D” czy też „wielce możliwe, że urodził się w Pradze”) oraz danych, pomiędzy którymi występują zależności warunkowe (przy danej hipotezie). Dane określamy jako warunkowo niezależne, jeżeli zachodzi:

$$P(D_i|H) = P(D_i|H \text{ oraz } D_j),$$

dla wszystkich i, j (tj. dla wszystkich możliwych danych). Warunek ten spełniony jest bardzo rzadko – głównie właśnie w warunkach laboratoryjnych – i z tego też powodu niezmiernie rzadko reguła Bayesa jest właściwą metodą w procesie wnioskowania. Właściwa metoda jest zwykle znacznie bardziej skomplikowana, a może w tych sytuacjach ludzka intuicja sprawuje się lepiej? Może po prostu do twierdzenia Bayesa człowiek nie zdążył się „przyzwyczaić” w swym codziennym życiu, a za to ma więcej praktyki i wyczucia w bardziej skomplikowanych zagadnieniach?

Dla zilustrowania zależności warunkowej rozpatrzmy następujące dane oraz hipotezę:

D_1: *Osoba była urodzona w Pradze.*

D_2: *Osoba nazywa się Wilhelm Steinitz.*

H: *Osoba jest Anglikiem/Angielką i jednocześnie pierwszym mistrzem świata w szachach.*

Czy zachodzi $P(D_1|H) = P(D_1|H \text{ oraz } D_2)$? Prawdopodobieństwo tego, że Anglik urodził się w Pradze, jest stosunkowo niewielkie. Jednakże prawdopodobieństwo, że Anglik nazwiskiem Steinitz urodził się w Pradze, zdaje się znacznie większe: nazwisko „Steinitz” angielskie raczej nie jest, więc możemy uznać, że wzrasta prawdopodobieństwo urodzenia poza granicami Anglii. W rozumowaniu tym pominąłem drugą część hipotezy H, co jednak nie zmienia faktu, że $P(D_1|H) \neq P(D_1|H \text{ oraz } D_2)$.

Podsumowanie. Powyższe eksperymenty wskazują na istotne trudności, jakie sprawia człowiekowi zastosowanie prostych reguł wnioskowania. Z drugiej strony pojawia się spostrzeżenie, że człowiek rzadko styka się w swym życiu z problemami wymagającymi zastosowania reguły Bayesa w czystej postaci, co może nas nieco usprawiedliwiać. Czy zasadne jest jednak przypuszczenie, że z bardziej złożonymi – a zarazem częściej spotykanymi – problemami radzimy sobie lepiej? Właśnie gra w szachy, pasja Wilhelma Steinitza, zdaje się stanowić ważny argument za tą tezą: człowiek w tej grze wciąż pozostaje bezkonkurencyjny i komputery wyposażone w coraz to potężniejsze reguły wnioskowania mają ogromne kłopoty, szczególnie w grze pozycyjnej, gdzie ogromne moce obliczeniowe komputerów tracą na znaczeniu, a górę bierze intuicja szachisty–człowieka. A Steinitz, który studiował matematykę w Wiedniu, lecz porzucił twierdzenia na rzecz szachowych heurystyk, był urodzonym w Pradze szachistą austriackim, angielskim, a wreszcie amerykańskim żydowskiego pochodzenia. A zatem Anglikiem był, choć stosunkowo krótko.