10/03 (70)

Γ limatias $_{n\to\infty}$

Z okazji Γ-limatiasu numer $\binom{8}{4}$ podajemy $\binom{6}{3}+\binom{4}{2}+\binom{2}{1}+\binom{0}{0}$ własności liczb postaci $\binom{2n}{n}$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią.

$\binom{0}{0}$. Liczba $\binom{2n}{n}$ jest parzysta. Ponadto jest podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy n nie jest potęgą dwójki.

$\binom{2}{1}$. Liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez $n+1$.

3. Liczba $\binom{2n}{n}$ bardzo często ma cyfrę jedności 0. Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie piątkowym liczby n występuje co najmniej jedna cyfra 3 lub 4. Warunek ten spełniają wszystkie liczby n poniżej 1000 ze 161 wyjątkami. Poniżej 1000000 takich wyjątków jest tylko 19682.

4. Liczba $\binom{2n}{n}$ bardzo rzadko ma cyfrę jedności 8. Dzieje się tak wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie piątkowym liczby n występują tylko cyfry 0, 1 i 2, przy czym liczba jedynek przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Są tylko 32 takie liczby n mniejsze od 1000, najmniejszymi są: 31, 131, 151, 155, 157.

5. Liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez 3 wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie trójkowym liczby n występuje co najmniej jedna cyfra 2.

$\binom{4}{2}$. Ogólnie, liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez nieparzystą liczbę pierwszą p wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie liczby n przy podstawie p występuje co najmniej jedna cyfra większa od $p/2$.

7. Dla dowolnej takiej liczby pierwszej p, że $n<p<2n$, liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez p.

8. Każdy dzielnik liczby $\binom{2n}{n}$ będący potęgą liczby pierwszej, jest nie większy od $2n$.

9. Jeżeli liczba n jest parzysta, a $p=2n+1$ jest liczbą pierwszą, to liczba $\binom{2n}{n}-1$ jest podzielna przez p.

10. Jeżeli liczba n jest nieparzysta, a $p=2n+1$ jest liczbą pierwszą, to liczba $\binom{2n}{n}+1$ jest podzielna przez p.

11. Jeżeli liczba n jest parzysta, a $p=2n-1$ jest liczbą pierwszą, to liczba $\binom{2n}{n}+4p$ jest podzielna przez p^2.

12. Jeżeli liczba n jest nieparzysta, a $p=2n-1$ jest liczbą pierwszą, to liczba $\binom{2n}{n}-4p$ jest podzielna przez p^2.

13. Liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez $2n-1$.

14. Dla $n<58$ liczba $\binom{2n}{n}$ przy dzieleniu przez 7 daje resztę różną od 3.

15. Dla $n<183$ liczba $\binom{2n}{n}$ przy dzieleniu przez 13 daje resztę różną od 8 i od 11.

16. Dla $n<330$ liczba $\binom{2n}{n}$ przy dzieleniu przez 17 daje resztę różną od 10.

17. Dla $n<1735$ liczba $\binom{2n}{n}$ przy dzieleniu przez 41 daje resztę różną od 28.

18. Zachodzi nierówność $\binom{2n}{n}<\frac{4^n}{\sqrt{(n+1/4)\pi}}$.

19. Dla $n>30$ zachodzi nierówność

$$\binom{2n}{n}>\frac{4^n}{\sqrt{(n+0{,}251)\pi}}.$$

$\binom{6}{3}$. Zachodzi równość

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2.$$

21. Liczba $\binom{2n}{n}$ nie jest podzielna przez żadną z liczb 3, 5, 7 dla następujących czternastu wartości n: 1, 10, 756, 757, 3160, 3186, 3187, 3250, 7560, 7561, 7651, 20007, 59548377, 59548401. Są to wszystkie liczby $n<10^{10}$ o tej własności.

22. Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to liczba $\binom{2p}{p}$ przy dzieleniu przez p^3 daje resztę 2.

23. Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to liczba $\binom{2p^2}{p^2}-\binom{2p}{p}$ jest podzielna przez p^6.

24. Jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 3, to liczba $\binom{2p^3}{p^3}-\binom{2p^2}{p^2}$ jest podzielna przez p^9.

25. Jeżeli p i $q=p+2$ są liczbami pierwszymi bliźniaczymi, to liczba $\binom{2pq}{pq}-6q$ jest podzielna przez pq.

26. Niech $p<200$ będzie nieparzystą liczbą pierwszą i niech $n=\frac{p(p+1)}{2}$. Wówczas liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez n, o ile p nie jest jedną z liczb 79, 83, 89, 199.

27. Liczba $\binom{100}{50}$ jest podzielna przez $\binom{20}{10}$.

28. Dla n parzystych zachodzi równość

$$\mathrm{NWD}\binom{2n}{n},\binom{2n+2}{n+1}=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}=\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2\cdot(2n+1)}.$$

29. Dla n nieparzystych zachodzi równość

$$\mathrm{NWD}\binom{2n}{n},\binom{2n+2}{n+1}=\frac{2\cdot\binom{2n}{n}}{n+1}=\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{2n+1}.$$

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl