Hipoteza 3
Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że
$$|c_k - n_k| \leqslant M\, k^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$
dla wszystkich $k > M$.

Warto wspomnieć, że mocniejsza wersja ostatniej hipotezy,
$$|c_k - n_k| \leqslant \sqrt{k} \quad \text{dla wszystkich } k \geqslant 1,$$
znana była od 1897 roku jako hipoteza Mertensa. Dziś jednak wiadomo, że hipoteza Mertensa jest fałszywa dla co najmniej jednej liczby $k < \exp(10^{65})$.

5. Dla tych, którzy wciąż nie są przekonani, czy funkcja ζ ma jakieś poważniejsze związki z teorią liczb, zamieszczamy tabelkę, zaczerpniętą z internetowej *Encyklopedii Matematycznej* Erica Weinsteina. Niech $Q_k(n)$ oznacza liczbę tych liczb naturalnych $\leqslant n$, które nie dzielą się przez żadną k-tą potęgę.

Oto niektóre z liczb $1/\zeta(k)$ i $Q_k(n)$:

k	$1/\zeta(k)$	$Q_k(1000)$	$Q_k(10^6)$
2	0,607927...	608	607926
3	0,831907...	833	831910
4	0,923938...	925	923939
5	0,964387...	965	964388
6	0,982953...	984	982954

6. Czy są jakieś powody lub poszlaki, pozwalające wierzyć, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa? Tak, oto niektóre z nich.

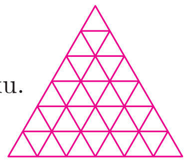
Hardy w 1914 roku wykazał, że na prostej krytycznej leży nieskończenie wiele zer funkcji ζ, a Levinson w 1974 – że na prostej krytycznej leży przynajmniej $\frac{1}{3}$ nietrywialnych zer funkcji ζ. Dzięki eksperymentom komputerowym znane są dziś wartości około 100 miliardów nietrywialnych zer funkcji ζ i wiemy, że jeśli liczba ρ, należąca do pasa krytycznego, stanowi kontrprzykład do hipotezy Riemanna, to z pewnością $|\mathrm{Im}\,\rho| > 29 \cdot 10^9$. Znane są też niektóre znacznie dalsze zera (na przykład około miliarda zer o częściach urojonych rzędu $2{,}5 \cdot 10^{15}$, oraz garstka rekordowych zer o częściach urojonych rzędu $1{,}3 \cdot 10^{21}$). Wszystkie należą do prostej krytycznej.

Mimo to wiele osób sądzi, że w poszukiwaniach dowodu wcale nie jesteśmy dalej niż sprawca całego zamieszania.

Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

We wszystkich poniższych zadaniach rozważamy trójkąt równoboczny o boku n podzielony na trójkąty równoboczne o boku 1 jak na rysunku. Dwa małe trójkąty nazywamy sąsiadami, jeśli mają wspólny bok.



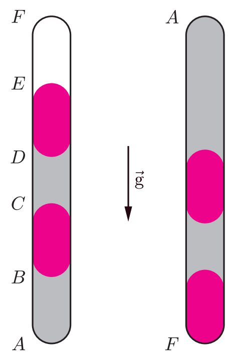
M 1036. Niech punkty $P_1, P_2, \ldots, P_k, P_{k+1} = P_1$ będą takie, że P_i, P_{i+1} są środkami sąsiadujących trójkątów, dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnić, że k jest liczbą parzystą.
Rozwiązanie na str. 16

M 1037. Niech W będzie wielokątem, którego każdy bok jest odcinkiem łączącym środki dwóch sąsiadujących małych trójkątów. Udowodnić, że pole W jest równe liczbie punktów kratowych leżących wewnątrz W pomnożonej przez $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (punktami kratowymi nazywamy tutaj wierzchołki małych trójkątów).
Rozwiązanie na str. 16

M 1038. Niech bok dużego trójkąta będzie liczbą parzystą. Każdy z małych trójkątów pomalowano na żółto lub niebiesko tak, że każdy wewnętrzny (= ten, który ma 3 sąsiadów) żółty trójkącik ma dokładnie dwóch niebieskich sąsiadów oraz każdy wewnętrzny niebieski trójkącik ma dokładnie dwóch żółtych sąsiadów. Udowodnić, że liczba trójkącików pomalowanych na żółto i na niebiesko jest jednakowa.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 603. Fragmenty AB i CD pionowej zatkanej na końcach wąskiej szklanej rurki $ABCDEF$ wypełnione są powietrzem, części BC i DE – rtęcią, a w części EF jest próżnia. Długości wszystkich części są równe. Ciśnienie w najniższym punkcie A jest równe p. Rurkę ostrożnie obrócono tak, że punkt F znajduje się na samym dole. Jakie będzie ciśnienie w punkcie F? Przyjąć, że temperatura powietrza jest stała.
Rozwiązanie na str. 9



F 604. W rurce z powietrzem w kształcie litery U na jednakowej wysokości h utrzymywane są dwa korki o masie m każdy. Pole przekroju lewego ramienia rurki wynosi $2S$, prawego ramienia i podstawy jest równe S. Długość podstawy wynosi $3h$. Ciśnienie powietrza p_0 w rurce jest równe atmosferycznemu. Na jakiej wysokości ustali się położenie korków po ich zwolnieniu? Korki mogą poruszać się tylko w pionowych częściach rurki. Przyjąć, że temperatura powietrza jest stała.
Rozwiązanie na str. 9