

O Hipotezie Poincarégo

Tadeusz KOŹNIEWSKI

W początkach XX wieku znakomity francuski matematyk Henri Poincaré (1854–1912) wprowadził szereg nowych metod geometrycznych i algebraicznych, za pomocą których można badać ważne obiekty geometryczne, jakimi są wielościany i rozmaitości. Metody te często pozwalają stwierdzić, czy dane dwie rozmaitości są „geometrycznie podobne” (ściślej: homeomorficzne). Hipoteza Poincarégo dotyczy takiego właśnie problemu. W poniższym artykule postaramy się przybliżyć Czytelnikowi pojęcia występujące w jej sformułowaniu, wskazać na jej źródła, a także podać pewne jej uogólnienia.

Rozmaitości. Mówimy, że podzbiór $M \subset R^n$ jest rozmaitością 1-wymiarową, jeśli M lokalnie wygląda jak odcinek otwarty (a, b) . Bardziej precyzyjnie można to wyrazić, mówiąc, że M jest lokalnie wykresem ciągłej funkcji jednej zmiennej. Podamy teraz kilka przykładów rozmaitości 1-wymiarowych.

Bezpośrednio z definicji wynika, że jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale (a, b) , to zarówno wykres funkcji $x_2 = f(x_1)$, jak i wykres funkcji $x_1 = f(x_2)$ są rozmaitościami 1-wymiarowymi w R^2 (rys. 1 i 2). Okrąg S^1 z rysunku 3 nie jest wykresem żadnej funkcji, ale jest rozmaitością 1-wymiarową, bo jest lokalnie wykresem funkcji $x_2 = \sqrt{1 - x_1^2}$ lub $x_2 = -\sqrt{1 - x_1^2}$. Linia śrubowa z rysunku 4 jest rozmaitością 1-wymiarową w R^3 , podobnie jak elipsa z rysunku 5. Suma dwóch stycznych okręgów z rysunku 6 nie jest rozmaitością, bo w otoczeniu punktu $(0, 0)$ zbiór X nie jest wykresem żadnej funkcji.

Podzbiór $M \subset R^n$ nazywamy rozmaitością 2-wymiarową, jeśli lokalnie wygląda jak otwarte koło 2-wymiarowe, to znaczy każdy punkt $x \in M$ ma otoczenie, w którym M jest wykresem ciągłej funkcji dwóch zmiennych. Na przykład sfera 2-wymiarowa z rysunku 7 jest rozmaitością 2-wymiarową, bo jest lokalnie wykresem funkcji $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ lub $x_3 = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Innym przykładem rozmaitości 2-wymiarowej jest torus z rysunku 8. Płaszczyzna rzutowa z rysunku 9, o której możemy myśleć jako o rozmaitości powstałej ze sfery dwuwymiarowej przez sklejenie punktów antypodycznych, jest rozmaitością 2-wymiarową w R^4 .

Powyzsze definicje rozmaitości 1 i 2-wymiarowych w sposób naturalny uogólniają się na przypadek wyższych wymiarów.

Dla dowolnej liczby naturalnej k rozmaitością k -wymiarową nazywamy taki podzbiór $M \subset R^n$ ($k < n$), który lokalnie „wygląda jak” otwarty dysk k -wymiarowy $D^k(a, r) = \{x \in R^k : |x - a| < r\}$ dla pewnych $a \in R^k$ oraz $r > 0$, czyli lokalnie jest wykresem ciągłej funkcji k zmiennych. Na przykład dla każdego naturalnego k sfera k -wymiarowa $S^k = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in R^{k+1} : x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1\}$ jest rozmaitością k -wymiarową w R^{k+1} .

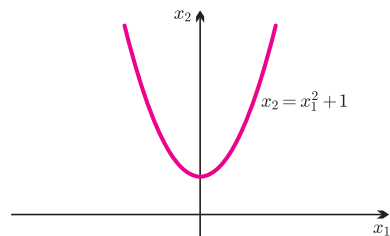
Homeomorfizmy. Zajmiemy się teraz porównywaniem rozmaitości, starając się wyróżnić te, które z naszego punktu widzenia są „takie same”. Rozmaitości k -wymiarowe M_1, M_2 będziemy uznawali za równoważne (inaczej: homeomorficzne), jeśli jedną z nich można uzyskać z drugiej przez rozciąganie i zgniatanie, bez rozrywania i sklejanja.

Dokładniej: przekształcenie ciągłe $h : M_1 \rightarrow M_2$ nazywamy homeomorfizmem, jeśli istnieje takie przekształcenie ciągłe $g : M_2 \rightarrow M_1$, że $g(h(x)) = x$ dla każdego $x \in M_1$ oraz $h(g(x)) = x$ dla każdego $x \in M_2$. Jeśli istnieje homeomorfizm $h : M_1 \rightarrow M_2$, to mówimy, że M_1 i M_2 są homeomorficzne, a przekształcenie g nazywamy homeomorfizmem odwrotnym do h .

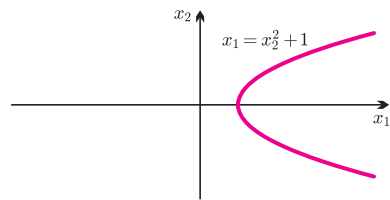
Parabola z rysunku 1 jest homeomorficzna z linią śrubową z rysunku 4. Okrąg S^1 z rysunku 3 jest z kolei homeomorficzny z elipsą M z rysunku 5.

Przekształcenie $h : P \rightarrow W$ paraboli $P = \{(t, t^2 + 1) : t \in R\}$ w linię śrubową $W = \{(\cos(t), \sin(t), t) : t \in R\}$ określone wzorem $h(t, t^2 + 1) = (\cos(t), \sin(t), t)$ jest homeomorfizmem. Przekształcenie $h : S^1 \rightarrow M$, $h(x_1, x_2) = (x_1, x_2, 5 - x_1)$ to homeomorfizm sfery z rysunku 3 w elipsę z rysunku 5.

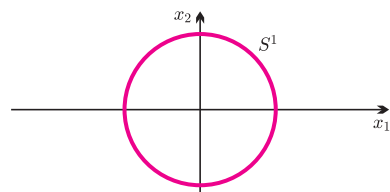
Na to, by stwierdzić, że dwie rozmaitości nie są homeomorficzne, wygodnie jest znać jakąś własność rozmaitości, która nie zmienia się przy homeomorfizmach, to znaczy jeśli rozmaitość M ją ma, to ma ją też każda



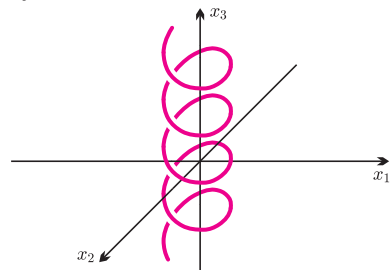
Rys. 1



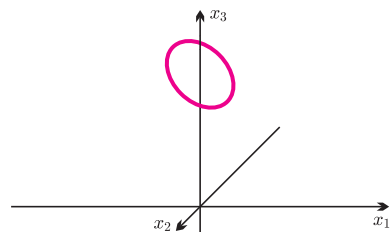
Rys. 2



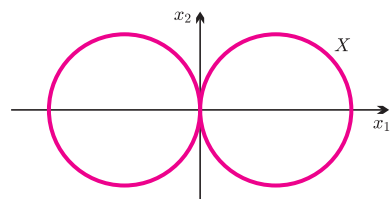
Rys. 3



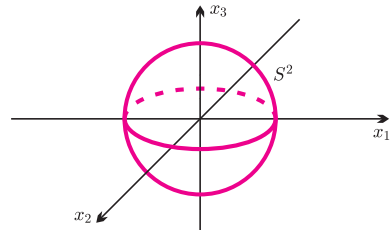
Rys. 4. Linia śrubowa $\{(\cos(t), \sin(t), t) : t \in R\}$.



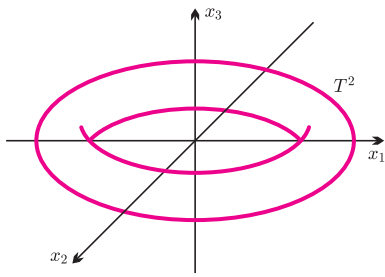
Rys. 5. Elipsa $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \text{ oraz } x_1 + x_3 = 5\}$



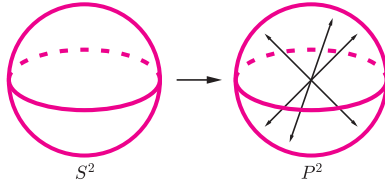
Rys. 6



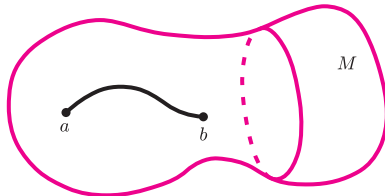
Rys. 7. $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$



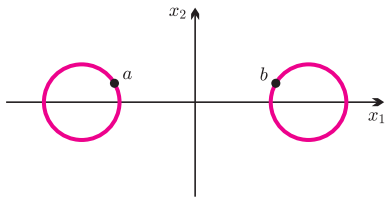
Rys. 8. $T^2 = \{(5 + \cos(\beta)) \cos(\alpha), (5 + \cos(\beta)) \sin(\alpha), \sin(\beta)\}$: $\alpha, \beta \in R$



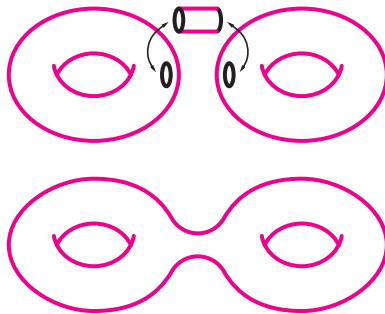
Rys. 9. Płaszczyzna rzutowa $P^2 = \{(x^2 - y^2, xy, yz, zx) \in R^4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Zauważmy, że funkcja $g: S^2 \rightarrow P^2$, $g(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, yz, zx)$ ma tę własność, że $g(x, y, z) = g(a, b, c) \iff (x, y, z) = \pm(a, b, c)$.



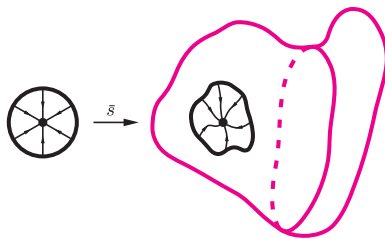
Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

rozmaitość homeomorficzna z M . Przykładem takiej własności jest zwartość. Mówimy, że rozmaitość $M \subset R^n$ jest zwarta, jeśli jest domknięta (to znaczy każdy zbieżny w R^n ciąg punktów leżących w M ma granicę w M) oraz jest ograniczona (to znaczy jest zawarta w pewnej n -wymiarowej kuli). Ważną cechą funkcji ciągłych (w szczególności homeomorfizmów) jest to, że przeprowadzają zbiory zwarte na zbiory zwarte. Spośród przykładów na rysunkach 1–5 okrąg i elipsa są rozmaitościami zwartymi, a parabola i linia śrubowa nie. Stąd, na przykład, okrąg nie jest homeomorficzny z parabolą.

Inną własnością rozmaitości zachowywaną przez homeomorfizmy jest spójność. Mówimy, że rozmaitość M jest spójna, jeśli jest ona „w jednym kawałku”. To znaczy, że każde dwa punkty $x, y \in M$ można połączyć łukiem leżącym całkowicie w M , czyli istnieje taka funkcja ciągła z odcinka domkniętego w M , $f: [a, b] \rightarrow M$, że $f(a) = x$, $f(b) = y$ (rys. 10). Wszystkie podane powyżej przykłady rozmaitości są spójne (dlaczego?). Przykładem rozmaitości niespójnej jest suma dwóch rozłącznych okręgów z rysunku 11. Homeomorfizmy przeprowadzają rozmaitości spójne na rozmaitości spójne.

Można wykazać, że każda zwarta i spójna rozmaitość 1-wymiarowa jest homeomorficzna z okręgiem S^1 . Istnieje też pełny opis rozmaitości 2-wymiarowych. W tym celu stosuje się konstrukcję zwaną sumą spójną. Jeśli M_1, M_2 są rozłącznymi rozmaitościami 2-wymiarowymi w R^n , to ich sumę spójną tworzymy, wycinając w każdej z nich okrągły otwór i doklejając do brzegów otrzymanych otworów rurkę tak, by rurka nie przecinała M_1 i M_2 poza punktami doklejenia. Rysunek 12 przedstawia sumę spójną dwóch torusów. Oczywiście, konstrukcję tę można powtarzać, tworząc sumy spójne dowolnej liczby rozmaitości. Dowodzi się, że każda zwarta i spójna rozmaitość 2-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą S^2 lub z sumą spójną pewnej liczby torusów lub z sumą spójną pewnej liczby płaszczyzn rzutowych. Twierdzenie to nazywa się klasyfikacją rozmaitości 2-wymiarowych.

Patrząc na tę klasyfikację, można zadać pytanie, czy istnieje jakaś własność geometryczna, która wyróżnia wśród wszystkich rozmaitości 2-wymiarowych te z nich, które są homeomorficzne ze sferą. Okazuje się, że taka własność istnieje. Jest nią jednospójność.

Jednospójność. Mówimy, że rozmaitość $M \subset R^n$ jest jednospójna, jeśli każdą gumkę recepturkę naciągniętą na powierzchnię rozmaitości M można po powierzchni M ściągnąć do punktu (rys. 13).

Dokładniej: rozmaitość $M \subset R^n$ jest jednospójna, jeśli dla każdego przekształcenia ciągłego $s: S^1 \rightarrow M$ (zwanego pętlą na M) istnieje takie przekształcenie ciągłe

$$\bar{s}: \overline{D^2} = \{(x_1, x_2) \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \rightarrow M,$$

że $\bar{s}(x) = s(x)$ dla każdego $x \in S^1$.

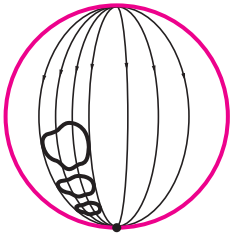
Sfera S^2 jest jednospójna. Jeśli obraz pętli s nie wypełnia całej sfery S^2 (na przykład punkt x nie leży w obrazie s), to ściągnięcie \bar{s} możemy uzyskać przez spychanie s do punktu $-x$ po południkach od x do $-x$ (rys. 14). Jeśli obraz pętli s wypełnia całą S^2 (to może się zdarzyć!), to okazuje się, że można w sposób ciągły zmienić s tak, by już nie cała S^2 była pokryta.

Suma spójna torusów ani suma spójna płaszczyzn rzutowych nie są jednospójne. Na przykład pętla z rysunku 15 nie ma ściągnięcia.

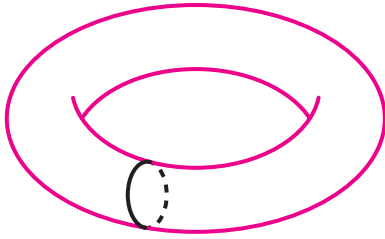
Z klasyfikacji rozmaitości 2-wymiarowych dostajemy więc, że każda zwarta, spójna, jednospójna rozmaitość 2-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą 2-wymiarową S^2 . Hipoteza Poincarégo postuluje to samo dla rozmaitości 3-wymiarowych.

Hipoteza Poincarégo: Każda zwarta, spójna, jednospójna rozmaitość 3-wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą 3-wymiarową S^3 .

Hipoteza ta była i ciągle jest przedmiotem badań. W przeszłości wielokrotnie anonsowano znalezienie dowodu. Wszystkie te próby okazały się niepoprawne. Obecnie (lato 2003) przedmiotem analiz jest propozycja dowodu przedstawiona przez G. Perelmana z Instytutu Stieklowa w Petersburgu. Rozważano też uogólnienia Hipotezy Poincarégo na wymiary $k \geq 4$.



Rys. 14



Rys. 15

Dla każdego $k \geq 4$ rozmaitość k -wymiarowa

$$S^2 \times S^{k-2} = \{(x_1, \dots, x_{k+2}) \in R^{k+2} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 = x_4^2 + \dots + x_{k+2}^2\}$$

jest zwarta, spójna, jednospójna, ale nie jest homeomorficzna z S^k . Stąd próba uogólnienia Hipotezy Poincarégo przez po prostu zastąpienie w jej sformułowaniu liczby 3 przez k jest fałszywa. Istnieje jednak uogólnienie Hipotezy Poincarégo, które jest prawdziwe. Powiemy, że rozmaitość M jest m -spójna jeśli dla każdego naturalnego $i \leq m$ i dla każdego przekształcenia ciągłego $s : S^i \rightarrow M$ istnieje takie przekształcenie ciągłe

$$\bar{s} : \overline{D^{i+1}} = \{(x_1, \dots, x_{i+1}) \in R^{i+1} : x_1^2 + \dots + x_{i+1}^2 \leq 1\} \rightarrow M,$$

że $\bar{s}(x) = s(x)$ dla każdego $x \in S^i$.

Uogólniona Hipoteza Poincarégo: Każda zwarta, spójna, $(k-1)$ -spójna rozmaitość k -wymiarowa jest homeomorficzna ze sferą k -wymiarową S^k .

Hipoteza ta została udowodniona dla $k \geq 5$ przez S. Smale'a, J. Stallingsa i M. Newmana w latach 1960-1966 oraz dla $k = 4$ przez M. Freedmana w 1982 roku. Zwarta, spójna rozmaitość 3-wymiarowa jest 2-spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednospójna, więc dla $k = 3$ Uogólniona Hipoteza Poincarégo to zwykła Hipoteza Poincarégo.

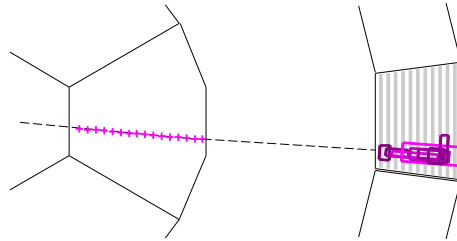
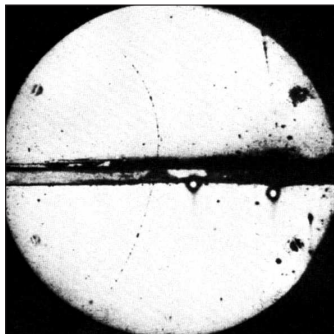
Czy można zobaczyć elektron?

To zależy od tego, co rozumiemy przez „zobaczyć”. Jeżeli ma to oznaczać „zaobserwowanie” kształtu za pomocą światła, to nie można, bo elektron na pewno nie ma „szczegółów” większych niż 10^{-18} metra, a długość fali świetlnej to co najmniej $4 \cdot 10^{-7}$ metra, więc światło ma prawie bilion razy za dużą długość fali.

Jeżeli przyjmiemy, że „zobaczyć” możemy nie tylko za pomocą światła, ale używając fali o dowolnie małej długości, to powyższe ograniczenie zniknie. W ten sposób elektrony bada fizyka cząstek elementarnych. Okazuje się, że nawet przy najwyższych dostępnych energiach elektron pozostaje punktowy – nie widzimy żadnych szczegółów. Z tego, jaka była największa energia, za pomocą której badano elektrony, wynika właśnie, że ich ewentualne „szczegóły” muszą mieć rozmiar mniejszy od 10^{-18} m, bo długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do energii.

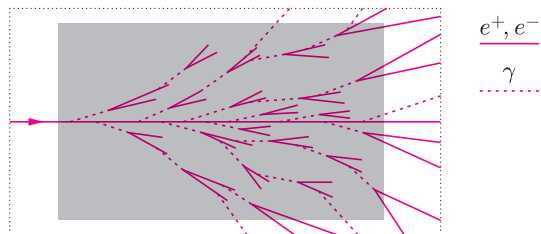
Można jednak obserwować ślad elektronu. Elektron ma ładunek elektryczny. Za jego pomocą oddziałuje z materialnym ośrodkiem. Dzięki temu w ośrodku pozostaje ślad utworzony ze zjonizowanych molekuł. Taki ślad można po prostu zobaczyć, zamieniając jonizację na kropelki przechłodzonej pary, jak robiono to w komorach mgłowych (rys. 1), na pęcherzyki pary przegrzanej cieczy (komory pęcherzykowe) lub na sygnały elektroniczne we współczesnych detektorach, które później można przetworzyć na ich komputerową wizualizację (rys. 2).

Rys. 1. Półkolisty ślad na tym zdjęciu to pierwszy przypadek zarejestrowania antymaterialnej cząstki – pozytonu, czyli antycząstki elektronu. Za pomocą komory mgłowej dokonał tego Carl Anderson w 1932 roku. Źródłem cząstki było promieniowanie kosmiczne.



Rys. 2. Rysunek przedstawia rekonstrukcję przejścia elektronu przez detektor DELPHI. Pokazane są tylko fragmenty dwóch poddetektorów. Elektron pojawia się z lewej strony i przechodzi najpierw przez wypełnioną mieszkanką gazową komorę projekcji czasowej. Jego przejście zarejestrowane zostało w postaci punktów zaznaczonych krzyżykami. Następnie elektron przelatuje do kalorymetru elektromagnetycznego wypełnionego warstwami ołowiu, gdzie inicjuje kaskadę elektromagnetyczną (zobacz rys. 3), zaznaczoną w postaci kolorowych prostokątów. Tam, „rozmienny na drobne”, kończy swoją podróż.

Jeżeli elektron ma dużą energię, to, wpadając do gęstego ośrodka, inicjuje kaskadę fotonowo-elektronową (rys. 3), którą można uznać za najbardziej spektakularne zjawisko towarzyszące omawianej cząstce.



Rys. 3

Podobne lawiny wtórnych cząstek wywołują fotony i oczywiście pozytony. Pozytony i elektrony świecą w silnych polach elektrycznych jąder