Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2003

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
453 ($WT = 1{,}83$) i **454** ($WT = 2{,}50$)
z numeru 1/2003

Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	36,24
Michał Adamaszek	– Kęty	31,73
Michał Jóźwikowski	– Błonie	31,66

Zadania z matematyki nr 465, 466

Redaguje Marcin E. KUCZMA

465. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD|, \qquad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADE|,$$

a pole trójkąta ACD jest średnią geometryczną pól trójkątów ABC i AED. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P; przekątne AD i CE przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że $|AP| = |AQ|$.

466. Rozwiązać w liczbach całkowitych x, y równanie $x + 2^y = 2^x$.

Zadanie **466** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2003

Przypominamy treść zadań:

461. Dane są funkcje ciągłe f oraz g; każda z nich jest ściśle monotonicznym odwzorowaniem zbioru wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ na ten sam zbiór. Wiadomo ponadto, że $f(0) = g(0)$ oraz

$$f^{-1}(g(x)) + g^{-1}(f(x)) = 2x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wykazać, że $f(x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

462. Rozważamy rozbicia zbioru wszystkich dodatnich liczb całkowitych na sumę dwóch zbiorów rozłącznych A, B.

(a) Czy istnieje takie rozbicie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu arytmetycznego?

(b) Czy istnieje takie rozbicie, w którym żaden ze zbiorów A, B nie zawiera nieskończonego (i niestałego) ciągu geometrycznego?

461. Funkcja

$$h(x) = f^{-1}\big(g(x)\big)$$

jest dobrze określona i ściśle monotoniczna oraz spełnia warunki $h(0) = 0$,

$$(1) \qquad h(x) + h^{-1}(x) = 2x \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcje h i h^{-1} są jednocześnie rosnące albo malejące; równanie (1) wyklucza tę drugą możliwość. Tak więc h jest funkcją ściśle rosnącą.

Mamy udowodnić, że $h(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy więc, że dla pewnej liczby a różnica $a - h(a) = r$ jest niezerowa. Przepisujemy równanie (1) jako

$$2x - h(x) = h^{-1}(x).$$

Stosujemy do obu stron funkcję h:

$$(2) \qquad h\big(2x - h(x)\big) = x \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wykażemy przez indukcję względem $n = 0, 1, 2, \ldots$, że

$$(3) \qquad h(a + nr) = a + (n-1)r.$$

Dla $n = 0$ jest to definicja liczby r. Zakładając słuszność (3) dla liczby całkowitej $n \geqslant 0$ i podstawiając w równaniu (2) $x = a + nr$, otrzymujemy po krótkim przekształceniu równość

$$h(a + nr + r) = a + nr,$$

czyli tezę indukcyjną (3), z n zastąpionym przez $n{+}1$.

Zatem równość (3) zachodzi dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n. Analogicznie wykazujemy jej prawdziwość dla niedodatnich całkowitych wartości n (indukcja względem $n = 0, -1, -2, \ldots$). Równość (3) zachodzi więc dla wszystkich całkowitych n.

Przyjmijmy, że $r > 0$ (gdy $r < 0$, rozumowanie jest takie samo, tylko wszystkie napisane niżej nierówności zmieniają zwrot). Niech n będzie liczbą całkowitą, dla której

$$(4) \qquad a + (n-1)r \leqslant 0 < a + nr.$$

Stosując do prawej nierówności (4) funkcję rosnącą h i uwzględniając wzory (3) oraz $h(0) = 0$, stwierdzamy, że $0 < a + (n-1)r$, co się kłóci z lewą nierównością (4). Sprzeczność kończy dowód.

462. Istnieją takie rozbicia. Oto przykład (jeden z wielu możliwych): rozważamy zbiory

$$C_k = \{k!,\ k!+1,\ \ldots,\ (k{+}1)! - 1\}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Niech A będzie sumą wszystkich zbiorów C_k o numerach nieparzystych, a B – sumą zbiorów C_k o numerach parzystych.

Weźmy pod uwagę dowolny nieskończony (niestały) ciąg geometryczny o wyrazach naturalnych. Niech q będzie ilorazem tego ciągu.

Gdy $k > q$, stosunek największej liczby w zbiorze C_k do najmniejszej liczby w tym zbiorze przekracza q. Rozważany ciąg nie może „przeskoczyć” tego zbioru, czyli pewien jego wyraz należy do C_k. Numer k może być parzysty lub nieparzysty. Stąd wniosek, że każdy nieskończony ciąg geometryczny (o wyrazach naturalnych) ma wyrazy zarówno w zbiorze A, jak i w zbiorze B; nie jest więc zawarty w żadnym z tych dwóch zbiorów.

To daje twierdzącą odpowiedź na pytanie (b). Oczywiście, ten sam przykład jest dobry i w przypadku pytania (a).

Zadania z fizyki nr 362, 363

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2003

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
354 ($WT = 1{,}75$) i **355** ($WT = 2{,}00$)
z numeru 3/2003

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	46,75
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	45,22
Tomasz Wietecha	– Tarnów	44,58

Prezentujemy czołówkę nieliczną, ale jaką! Po raz pierwszy od początków ligi fizycznej jej uczestnik pięciokrotnie zaliczył 44 punkty, a wyczynu tego dokonało jednocześnie dwóch liderów naszego peletonu – p. Idzik i p. Wietecha. Drugie okrążenie zamknął natomiast p. Nowogrodzki.

362. Stacja kosmiczna o masie $m = 10$ ton zawiera w objętości $V = 40\ \mathrm{m}^3$ powietrze pod ciśnieniem $p_0 = 10^5$ Pa i o temperaturze $T = 20°$ C. Nagle w ściance stacji powstał otwór o powierzchni $S = 1\ \mathrm{mm}^2$.

a) Po jakim czasie ciśnienie wewnątrz stacji spadnie do wartości $p_1 = 0{,}5 \cdot 10^5$ Pa (jeśli kosmonauci nie podejmą żadnych kroków zaradczych)? Zakładamy, że rozprężenie przebiega izotermicznie.

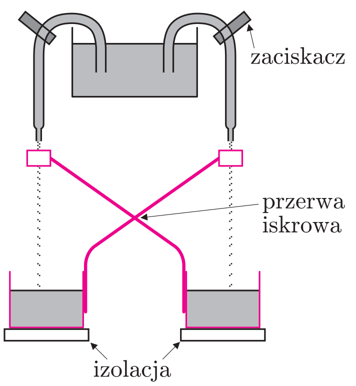
b) Jaką prędkość uzyska stacja wskutek odrzutu? Otwór jest tak położony, że odrzut nie spowoduje obrotu stacji.

363. W Canberze (Australia) jest fontanna, która wytryskuje wodę na wysokość 150 m. W każdej chwili w powietrzu znajduje się 6 m^3 wody. Jaka musi być minimalna moc pompy?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2003

Przypominamy treść zadań:

358. Przedstawione na rysunku obok urządzenie (zaprojektowane przez Kelvina) składa się z naczynia z wodą, z którego spływa ona cienkimi strugami do dwóch naczyń poniżej niego. Do każdego z dolnych naczyń przyspawano drut, na końcu którego znajduje się pierścień z blaszki otaczający spadającą strugę wody, przy czym woda powinna się dzielić na krople właśnie wewnątrz pierścienia. Po pewnym czasie w miejscu krzyżowania się drutów (gdzie odległość między nimi jest niewielka) zaczynają przeskakiwać iskry. Objaśnić działanie przyrządu.



359. Drut miedziany o kształcie spiralnym ma n zwojów, pole przekroju poprzecznego spirali wynosi S, a utworzona w ten sposób sprężyna ma stałą sprężystości k. Na sprężynie zawieszono ciężarek o masie m, a końce sprężyny przyłączono do źródła napięcia $U = U_0 \sin \omega t$. Obliczyć amplitudę drgań ciężarka po długim czasie (tzn. gdy można pominąć zjawiska przejściowe – można tu założyć, że występuje niewielkie tłumienie elektryczne i mechaniczne) oraz przesunięcie środka drgań względem jego położenia, gdy prąd nie płynie. Pominąć masę drutu. Przyjąć, że pole magnetyczne spirali jest takie, jak nieskończenie długiej zwojnicy.

Wskazówka. Przy tym założeniu siła ściskająca zwojnicę (działająca na końce wzdłuż osi) dana jest wzorem

$$F = (1/2)\mu_0 S(In/l)^2,$$

gdzie l – długość zwojnicy, I – natężenie prądu.

358. Jeśli w pewnej chwili jedno z dolnych naczyń (np. lewe) uzyska przypadkiem nieco wyższy potencjał elektryczny od drugiego, to ta różnica potencjałów wystąpi też między pierścieniami. Ponieważ górne naczynie wraz ze strugami wody niepodzielonej na krople może być uznane za jeden przewodnik, więc dodatni ładunek będzie się gromadził na jednym końcu tego przewodnika, a ujemny – na drugim (w przyjętym przykładzie dodatni na lewym końcu spadającej strugi, a ujemny na prawym). Odrywające się krople będą zabierać ze sobą ten ładunek do dolnych naczyń, które będą się ładować coraz silniej – aż napięcie między nimi spowoduje przeskok iskry. Na podobnej zasadzie działają maszyny elektrostatyczne.

359. Napięcie zasilające zwojnicę

$$U_0 \sin \omega t$$

należy przyrównać do wyrażenia

$$-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}(LI)/\mathrm{d}t,$$

gdzie Φ jest całkowitym strumieniem pola magnetycznego obejmowanym przez obwód. Jeśli pominiemy efekty przejściowe, to stąd wynika, że

$$LI = \frac{U_0}{\omega} \cos \omega t,$$

a po podstawieniu indukcyjności zwojnicy

$$L = \frac{\mu_0 n^2 S}{l}$$

mamy

$$\frac{I}{l} = \frac{1}{\mu_0 n^2 S} \cdot \frac{U_0}{\omega} \cos \omega t.$$

Zgodnie z podaną wskazówką siła ściskająca zwojnicę jest równa

$$F = \frac{1}{2\mu_0 n^2 S} \left(\frac{U_0}{\omega}\right)^2 \cos^2 \omega t.$$

Przedstawmy $\cos^2 \omega t$ w postaci

$$\frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t).$$

Pierwszy składnik (liczba 1) jest stałą, powodującą przesunięcie środka drgań o

$$\Delta l = \frac{1}{4\mu_0 n^2 Sk} \left(\frac{U_0}{\omega}\right)^2.$$

Drugi składnik jest siłą wymuszającą drgania ciężarka z częstością 2ω. Nietrudno wyliczyć, że amplituda tych drgań wyniesie

$$A = \frac{1}{4\mu_0 n^2 S(k - 4m\omega^2)} \left(\frac{U_0}{\omega}\right)^2.$$