

1. Wśród siedmiu problemów, za których rozwiązanie Instytut Claya gotów jest zapłacić milion dolarów, jest hipoteza Riemanna z 1859 roku. Można ją wysłowić tak krótko i sucho, że każdy laik zapyta zdumiony: i to ma być pytanie za milion dolarów? Zacznijmy więc od takiego właśnie sformułowania. Czytelników prosimy o cierpliwość: pod koniec artykułu znajdują równoważne, znacznie bardziej elementarne wersje tytułowej hipotezy.

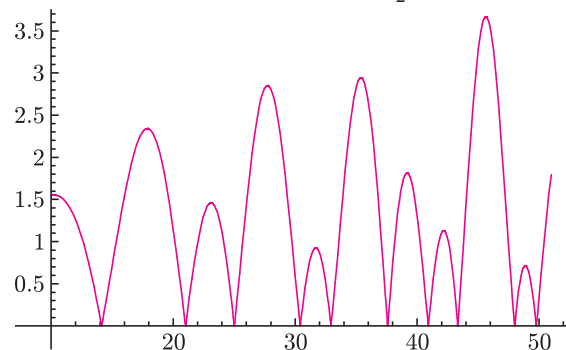
Słynna funkcja ζ Riemanna, dla s rzeczywistych i większych od jedynki, określona jest wzorem

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Metodami analizy zespolonej dowodzi się, że istnieje dokładnie jedna funkcja ζ zmiennej zespolonej, określona na płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, mająca w całej swej dziedzinie pochodną zespoloną i spełniająca równość (1) dla rzeczywistych $s > 1$. Owa funkcja ma miejsca zerowe dwóch rodzajów: tzw. zera trywialne w punktach $-2, -4, -6, \dots$ i tzw. zera nietrywialne (jest ich nieskończenie wiele) wewnątrz pasa $P = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

Hipoteza Riemanna głosi:

Jeśli $\rho \in P$ i $\zeta(\rho) = 0$, to $\operatorname{Re} \rho = \frac{1}{2}$.

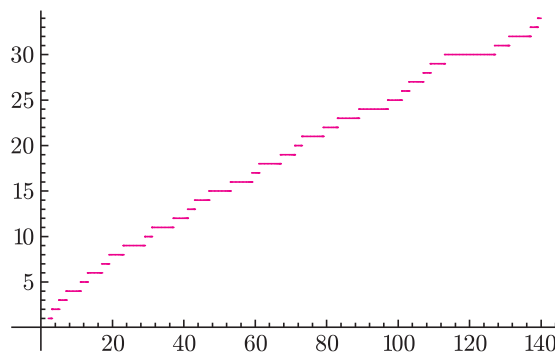


Rys. 1. Wykres $f(t) = |\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ i garść nietrywialnych zer funkcji ζ .

Prostą o równaniu $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ matematycy nazywają prostą krytyczną; hipoteza Riemanna głosi więc, innymi słowy, że wszystkie nietrywialne zera funkcji ζ należą do prostej krytycznej. Dlaczego to suche przypuszczenie jest ważne? Otóż funkcja ζ i hipoteza Riemanna są bardzo mocno związane z liczbami pierwszymi. W kolejnych punktach artykułu spróbujemy w ekspresowym tempie naszkicować ów związek (wzory można, w najgorszym razie, potraktować jak dzieła malarstwa abstrakcyjnego).

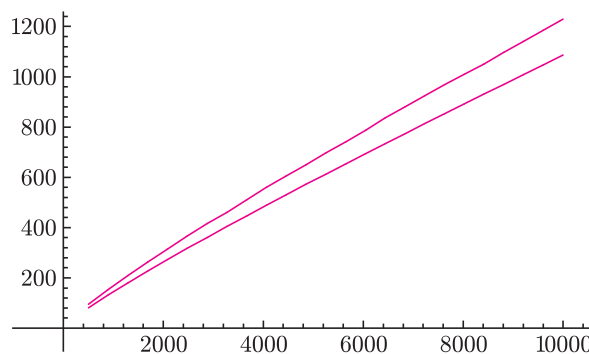
2. Liczby pierwsze pojawiają się wśród innych liczb kapryśnie. Co jakiś czas spotykamy parę bliźniaków, jak np. 3 i 5 czy $33218925 \cdot 2^{169690} \pm 1$, ale istnieją też dowolnie długie przedziały bez żadnej liczby pierwszej – np. dla $n \geq 3$ wszystkie liczby $n! + 2, n! + 3, \dots, n! + n$ są złożone.

Wykres funkcji $\pi(x)$, określonej jako liczba liczb pierwszych w przedziale $[0, x]$, na pierwszy rzut oka wygląda jak przypadkowy zygzak.



Rys. 2. Funkcja $\pi(x)$ dla $x \leq 140$.

Tenże wykres oglądany „z daleka”, tzn. na bardzo dużych przedziałach i w małej skali, wygładza się i porządnie. Można postawić naturalne pytania: jak szybko rośnie $\pi(x)$? Jaka zdefiniowana analitycznym wzorem funkcja dobrze oddaje zachowanie $\pi(x)$?

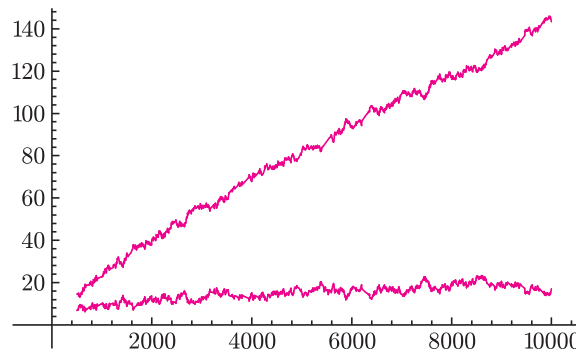


Rys. 3. Funkcja $\pi(x)$ dla $x \leq 10000$ (górny wykres). Dolny wykres to $x/\ln x$. Jak wynika z twierdzenia o liczbach pierwszych, które w 1896 roku udowodnili Hadamard i de la Vallée Poussin, błąd względny przybliżenia $\pi(x) \approx x/\ln x$ dąży do zera dla $x \rightarrow \infty$. (Błąd bezwzględny, niestety, rośnie.)

Gauss, posługując się danymi empirycznymi, sugerował, że

$$(2) \quad \pi(x) \approx \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = \operatorname{Li}(x) - \operatorname{Li}(2) \quad \text{dla } x > 2,$$

gdzie $\operatorname{Li}(x)$, tzw. logarytm całkowy, jest na przedziale $(1, \infty)$ tą funkcją pierwotną $1/\ln(x)$, która spełnia warunek $\operatorname{Li}(2) = 1,04\dots$ Przybliżenie Gaussa jest znacznie lepsze od $\pi(x) \approx x/\ln x$.



Rys. 4. Górny wykres to błąd bezwzględny przybliżenia $\pi(x)$ przez $x/\ln x$, dolny wykres – błąd bezwzględny przybliżenia (2).

3. W 1859 roku, w listopadowych sprawozdaniach Berlińskiej Akademii Nauk, ukazała się praca Bernharda Riemanna *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, licząca 9 niedużych stron i pełna niezwyklej, dalekosiężnej intuicji. Wyprowadzenia wielu wzorów autor szkicuje szalenie skrótowo lub całkowicie pomija; pełne dowody podali w ciągu kilkudziesięciu późniejszych lat m.in. Hadamard, de la Vallée Poussin i von Mangoldt. Bez dowodu pozostaje do dziś nasza tytułowa hipoteza.

Punktem wyjścia rozważań Riemanna jest pochodząca od Eulera równość

$$(3) \quad \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

gdzie iloczyn nieskończony jest po wszystkich liczbach pierwszych. Riemann szkicuje na dwóch stronach, jak określić prawą stronę dla wszystkich liczb zespolonych $s \neq 1$ – i tu właśnie mimochodem wtrąca swą hipotezę, poprzedzając ją krótkim *jest bardzo prawdopodobne, że*. Dodaje też, że po kilku nieudanych próbach przestał szukać dowodu, gdyż nie jest to najważniejsze z punktu widzenia jego bezpośrednich planów. Później wprowadza pomocniczą funkcję

$$(4) \quad R(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \dots,$$

która jest główną bohaterką dalszych jego rachunków. Jak widać, R to funkcja schodkowa, która skacze o 1 w każdej liczbie pierwszej, o $\frac{1}{2}$ w kwadratach liczb pierwszych, o $\frac{1}{3}$ w sześcianach liczb pierwszych itd. Ponieważ $\sqrt[n]{x} < 2$ dla $n > \ln x / \ln 2$, więc suma we wzorze (4) ma zawsze skończenie wiele składników.

Stosując różne bardzo wyrafinowane metody (całkowanie po krzywych w dziedzinie zespolonej, iloczyny nieskończone, wzór na odwrócenie transformaty Fouriera, liczne zmiany kolejności przejść granicznych), Riemann uzyskuje drugi wzór na $R(x)$, mianowicie

$$(5) \quad R(x) = \text{Li}(x) + n(x) + \text{pewien szereg } S(x),$$

gdzie nieistotny składnik $n(x) = -\ln 2 + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$ dąży szybko do stałej $-\ln 2$ dla $x \rightarrow \infty$, a $S(x)$ to, z grubsza biorąc, suma wartości $\text{Li}(x^\rho)$ obliczonych dla wszystkich nietrywialnych zer ρ funkcji ζ (ściśła definicja wymaga głębokiego wnikięcia w teorię funkcji analitycznych).

Korzystając z dwóch wzorów na $R(x)$, Riemann zaproponował przybliżenie

$$(6) \quad \pi(x) \approx \text{Li}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{Li}(\sqrt[n]{x}),$$

gdzie współczynnik

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n \text{ jest iloczynem parzystej} \\ & \text{liczby różnych liczb pierwszych,} \\ -1, & \text{jeśli } n \text{ jest iloczynem nieparzystej} \\ & \text{liczby różnych liczb pierwszych,} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Dla niezbyt dużych x przybliżenie (6) jest lepsze od tego, które proponował Gauss (gdymby wykres różnicy między lewą i prawą stroną (6) dodać do rysunku 4, to oś x -ów została by dość skutecznie zamazana). Nie to jest jednak najważniejsze. Chodzi o to, że znając wszystkie pierwiastki funkcji ζ , można dokładnie wyznaczyć błąd zarówno przybliżenia (2), jak i przybliżenia (6). Każdy z tych błędów jest najmniejszy właśnie wtedy, gdy wszystkie nietrywialne zera funkcji ζ mają część rzeczywistą równą $\frac{1}{2}$, bo właśnie wtedy sumy częściowe szeregu $S(x)$ mają szczególnie symetryczną postać, co prowadzi do rozmaitych redukcji.

Choćby z tego powodu hipotezę Riemanna uznaje się za najważniejszy nierozstrzygnięty problem teorii liczb.

4. Po tej historycznej dygresji pora na trzy inne przypuszczenia, równoważne hipotezie Riemanna. Pierwsze z nich mocno podkreśla związek hipotezy Riemanna z naszą wiedzą na temat rozkładu liczb pierwszych.

Hipoteza 1 (von Koch, 1901)

Istnieje taka stała C , że

$$(7) \quad |\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq C\sqrt{x} \ln x$$

dla każdego $x \geq 2$.

Dużo lepszemu oszacowaniu błędu przybliżenia $\pi(x)$ przez $\text{Li}(x)$ nie ma co oczekiwać: Littlewood wykazał, że istnieją dowolnie duże liczby x , dla których lewa strona jest rzędu $\text{Li}(\sqrt{x}) \ln \ln \ln x$, tzn. można marzyć co najwyżej o rozmaitych logarytmicznych poprawkach nierówności (7).

Warto zaznaczyć, że wynikające z hipotezy Riemanna oszacowania tempa wzrostu funkcji $\pi(x)$ mają nie tylko teoretyczny charakter: zależy od nich np. test pierwszości Millera, stosowany w kryptografii.

Znany dziś inne, zaskakująco elementarne zdanie, równoważne hipotezie Riemanna.

Hipoteza 2 (Lagarias, 2000)

Niech $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników n i niech $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Wtedy dla każdego $n \geq 1$

$$\sigma(n) \leq H_n + e^{H_n} \ln H_n,$$

przy czym równość ma miejsce tylko dla $n = 1$.

Aby wysłowić trzecią hipotezę, podzielimy liczby większe od 1 na trzy klasy: czerwone, niebieskie i bezbarwne. Bezbarwne są te, które dzielą się przez jakikolwiek pełny kwadrat różny od 1. Przykłady liczb bezbarwnych to 72, 99 i 10^{2003} . Czerwone są te, które są iloczynem parzystej liczby różnych czynników pierwszych, np. 6, 15, 210, niebieskie zaś te, które są iloczynem nieparzystej liczby różnych czynników pierwszych, np. 11, 30, czy 1001.

Czytelnik zauważył być może, że bezbarwne są te liczby n , dla których $\mu(n) = 0$, czerwone – te, dla których $\mu(n) = 1$, niebieskie zaś te, dla których $\mu(n) = -1$.

Niech c_k i n_k oznaczają, odpowiednio, liczbę liczb czerwonych i niebieskich w przedziale $[2, k]$ (dla przykładu: $c_{20} = 4$, $n_{20} = 8$).

Hipoteza 3

Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że

$$|c_k - n_k| \leq M k^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

dla wszystkich $k > M$.

Warto wspomnieć, że mocniejsza wersja ostatniej hipotezy,

$$|c_k - n_k| \leq \sqrt{k} \quad \text{dla wszystkich } k \geq 1,$$

znana była od 1897 roku jako hipoteza Mertensa. Dziś jednak wiadomo, że hipoteza Mertensa jest fałszywa dla co najmniej jednej liczby $k < \exp(10^{65})$.

5. Dla tych, którzy wciąż nie są przekonani, czy funkcja ζ ma jakieś poważniejsze związki z teorią liczb, zamieszczamy tabelkę, zaczerpniętą z internetowej *Encyklopedii Matematycznej* Erica Weinsteina. Niech $Q_k(n)$ oznacza liczbę tych liczb naturalnych $\leq n$, które nie dzielą się przez żadną k -tą potęgę.

Oto niektóre z liczb $1/\zeta(k)$ i $Q_k(n)$:

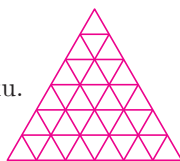
| k | $1/\zeta(k)$ | $Q_k(1000)$ | $Q_k(10^6)$ |
|-----|--------------|-------------|-------------|
| 2 | 0,607927... | 608 | 607926 |
| 3 | 0,831907... | 833 | 831910 |
| 4 | 0,923938... | 925 | 923939 |
| 5 | 0,964387... | 965 | 964388 |
| 6 | 0,982953... | 984 | 982954 |



Zadania

Redaguje Mikołaj ROTKIEWICZ

We wszystkich poniższych zadaniach rozważamy trójkąt równoboczny o boku n podzielony na trójkąty równoboczne o boku 1 jak na rysunku. Dwa małe trójkąty nazywamy sąsiadami, jeśli mają wspólny bok.



M 1036. Niech punkty $P_1, P_2, \dots, P_k, P_{k+1} = P_1$ będą takie, że P_i, P_{i+1} są środkami sąsiadujących trójkątów, dla $i = 1, 2, \dots, k$. Udowodnić, że k jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie na str. 16

M 1037. Niech W będzie wielokątem, którego każdy bok jest odcinkiem łączącym środki dwóch sąsiadujących małych trójkątów. Udowodnić, że pole W jest równe liczbie punktów kratowych leżących wewnątrz W pomnożonej przez $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (punktami kratowymi nazywamy tutaj wierzchołki małych trójkątów).

Rozwiązanie na str. 16

M 1038. Niech bok dużego trójkąta będzie liczbą parzystą. Każdy z małych trójkątów pomalowano na żółto lub niebiesko tak, że każdy wewnętrzny (= ten, który ma 3 sąsiadów) żółty trójkącik ma dokładnie dwóch niebieskich sąsiadów oraz każdy wewnętrzny niebieski trójkącik ma dokładnie dwóch żółtych sąsiadów. Udowodnić, że liczba trójkącików pomalowanych na żółto i na niebiesko jest jednakowa.

Rozwiązanie na str. 16

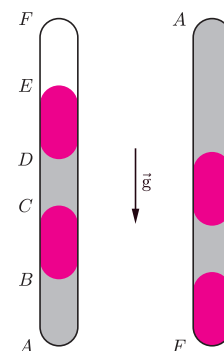
6. Czy są jakieś powody lub poszlaki, pozwalające wierzyć, że hipoteza Riemanna jest prawdziwa? Tak, oto niektóre z nich.

Hardy w 1914 roku wykazał, że na prostej krytycznej leży nieskończenie wiele zer funkcji ζ , a Levinson w 1974 – że na prostej krytycznej leży przynajmniej $\frac{1}{3}$ nietrywialnych zer funkcji ζ . Dzięki eksperymentom komputerowym znane są dziś wartości około 100 miliardów nietrywialnych zer funkcji ζ i wiemy, że jeśli liczba ρ , należąca do pasa krytycznego, stanowi kontrprzykład do hipotezy Riemanna, to z pewnością $|\text{Im } \rho| > 29 \cdot 10^9$. Znane są też niektóre znacznie dalsze zera (na przykład około miliarda zer o częściach urojonych rzędu $2,5 \cdot 10^{15}$, oraz garstka rekordowych zer o częściach urojonych rzędu $1,3 \cdot 10^{21}$). Wszystkie należą do prostej krytycznej.

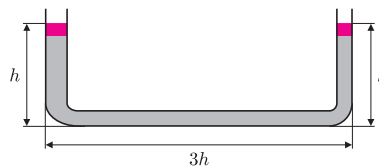
Mimo to wiele osób sądzi, że w poszukiwaniach dowodu wcale nie jesteśmy dalej niż sprawca całego zamieszania.

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 603. Fragmenty AB i CD pionowej zatkaanej na końcach wąskiej szklanej rurki $ABCDEF$ wypełnione są powietrzem, części BC i DE – rtęcią, a w części EF jest próżnia. Długości wszystkich części są równe. Ciśnienie w najniższym punkcie A jest równe p . Rurkę ostrożnie obrócono tak, że punkt F znajduje się na samym dole. Jakie będzie ciśnienie w punkcie F ? Przyjąć, że temperatura powietrza jest stała. Rozwiązanie na str. 9



F 604. W rurce z powietrzem w kształcie litery U na jednakowej wysokości h utrzymywane są dwa korki o masie m każdy. Pole przekroju lewego ramienia rurki wynosi $2S$, prawego ramienia i podstawy jest równe S . Długość podstawy wynosi $3h$.



Ciśnienie powietrza p_0 w rurce jest równe atmosferycznemu. Na jakiej wysokości ustali się położenie korków po ich zwolnieniu? Korki mogą poruszać się tylko w pionowych częściach rurki. Przyjąć, że temperatura powietrza jest stała. Rozwiązanie na str. 9